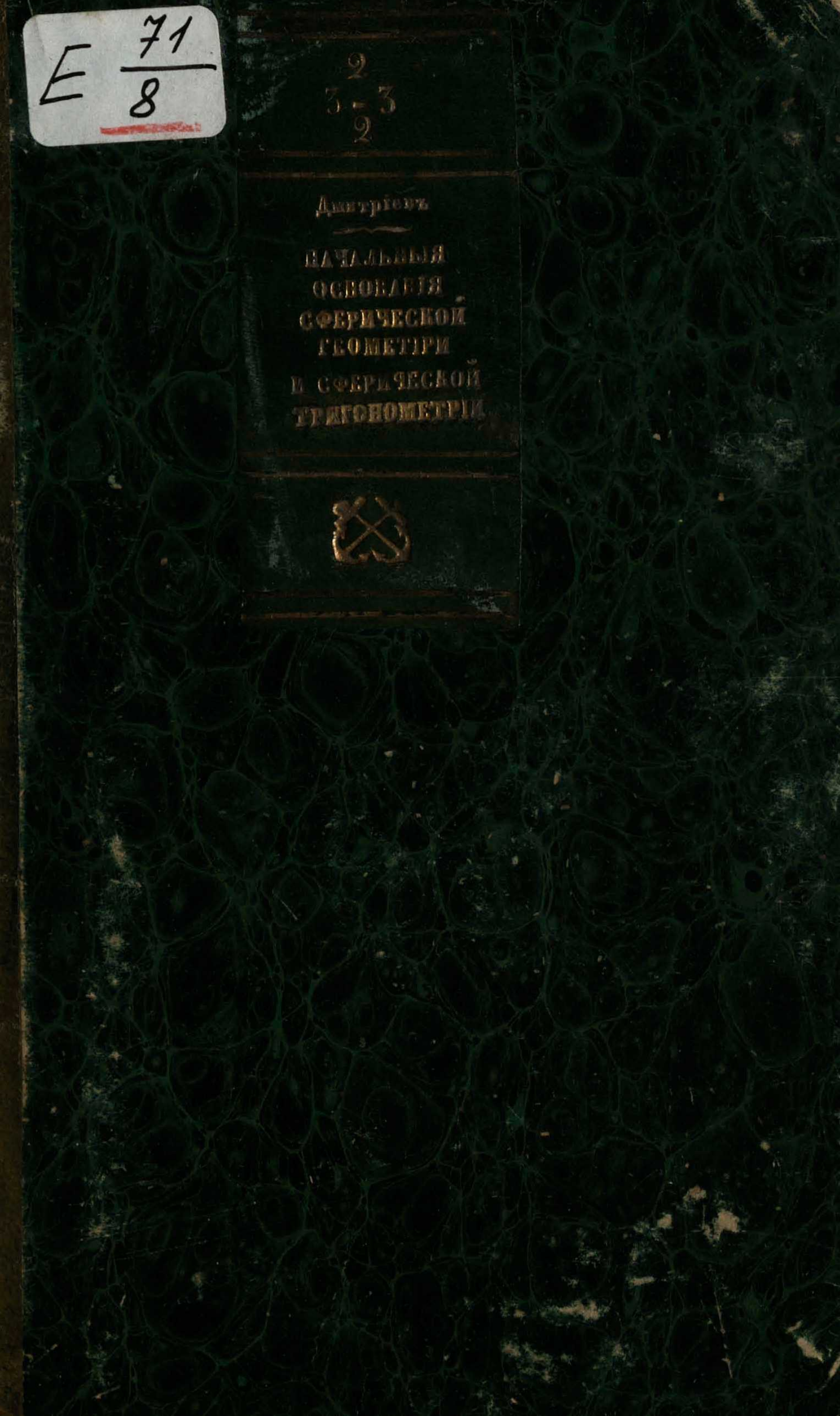
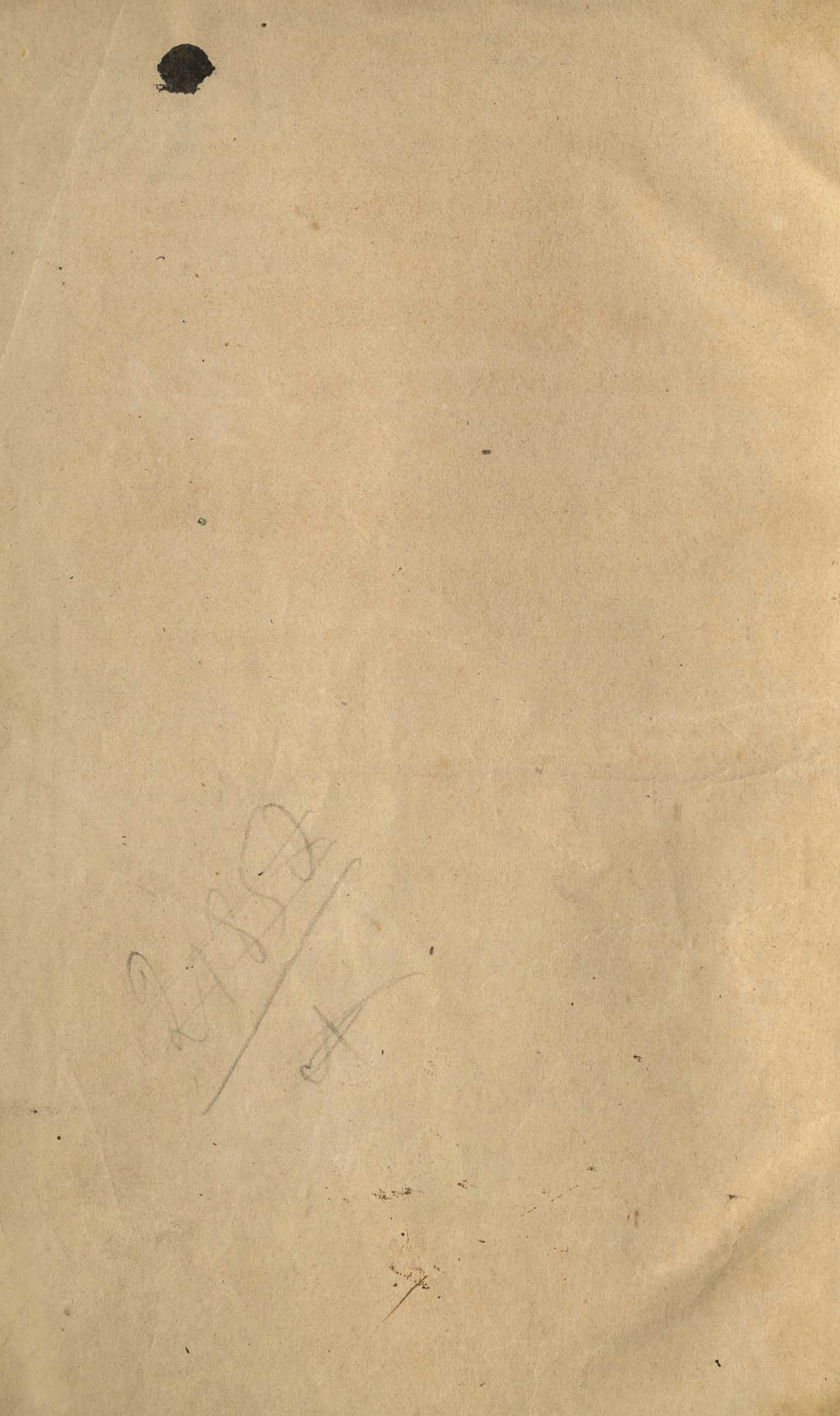


Е 71/8
2
3-3
2
Дмитріевъ
НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ И СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ



# НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

# СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ

# И

# СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ.

По порученію начальства Морскаго кадетскаго корпуса


СОСТАВИЛЪ

**А. ДМИТРІЕВЪ.**





С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Морскаго кадетскаго корпуса.

1863.

Дозволено цензурою. 17 Іюня 1863 г. С.-Петербургъ.

Цензоръ *А. Робертъ*.

# ПРЕДИСЛОВІЕ.

При составленіи этого втораго отдѣла, издаваемаго мною руководства, т. е. *сферической геометріи и сферической тригонометріи*, я держался той же системѣ, на которую указалъ въ предисловіи къ тригонометріи прямолинейной.

Назначая это руководство для начинающихъ, я предпочелъ синтезисъ анализу, и, сохраняя строгую систему, вездѣ гдѣ только можно было, старался переходить отъ легкаго къ трудному, отъ простаго къ сложному, отъ частнаго къ общему: вотъ причина, по которой я почелъ полезнымъ, какъ и въ прямолинейной тригонометріи, начать съ треугольниковъ сферическихъ прямоугольныхъ и потомъ уже перейти къ рѣшенію треугольниковъ сферическихъ косвенноугольныхъ.

Учащіеся, которые желали бы ознакомиться съ изящнымъ аналитическимъ способомъ Эйлера—выводить всѣ необходимыя уравненія сферической тригонометріи изъ одного главнаго, найдутъ этотъ способъ въ слѣдствіяхъ и прибавленіяхъ къ главнымъ теоремамъ главы III; тамъ же помѣщены замѣчательнѣйшія усовершенствованія и упрощенія этого способа, предложенныя Лагранжемъ, Деламбромъ и Лежандромъ.

При рѣшеніи треугольниковъ по нелогариѳмическимъ формуламъ, или помощію вспомогательныхъ угловъ, а также при изслѣдованіи общихъ формулъ для рѣшенія сомнительныхъ случаевъ, я часто прибѣгалъ къ пріемамъ графическимъ и къ наглядному объясненію помощію чертежа. Въ этомъ случаѣ я не могъ не сознать справедливости словъ Лагранжа, который говоритъ, что иногда самыя элементарныя построенія могутъ служить къ поясненію весьма сложныхъ аналитическихъ формулъ. „J'avois soin — говоритъ онъ — de revenir frequemment aux considerations géométriques, que je crois très-propres à donner au jugement de la force et de la netteté".

Въ параллель съ обще-принятыми способами вычисленія, какъ треугольниковъ, такъ и нелогариѳмическихъ формулъ, я считалъ полезнымъ ознакомить учащихся съ примѣненіемъ *Гаусовыхъ* логариѳмовъ *суммъ* и *разностей*.

Къ каждому отдѣлу приложено мною по нѣскольку задачъ, какъ для упражненія въ вычисленіяхъ, такъ и для самостоятельныхъ теоретичес-

# НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ И ТРИГОНОМЕТРІИ.

## ГЛАВА I.

## Краткій очеркъ сферической геометріи.

### § 1.

1) **Предварительныя свѣдѣнія.** *Круги шара, оси, полюсы.* (*) Изъ геометріи уже извѣстно, что: 1. Всякое сѣченіе шара плоскостію есть кругъ; если сѣченіе проходитъ черезъ центръ шара, то кругъ называется большимъ или великимъ; малымъ кругомъ шара называется такой, сѣченіе котораго проходитъ не через центръ шара. Окружности большихъ круговъ пересѣкаются взаимно на двѣ равныя части. Круги шара, которыхъ плоскости параллельны, называются параллельными кругами.

Прямая $PP'$ (черт. 1), проходящая черезъ центръ шара, и

(*) Поверхность шара, а также свойства сферическихъ фигуръ, составленныхъ дугами большихъ и малыхъ круговъ, еще съ древнѣйшихъ временъ были предметомъ изслѣдованія знаменитыхъ геометровъ. На поверхности шара древніе старались рѣшить построеніемъ нѣкоторые вопросы, относящіеся до астрономіи.

*Гиппархъ Никейскій*, или *Родосскій*, (потому что въ этомъ городѣ онъ началъ свои астрономичсскія изысканія), жившій 160 г. — 125 г. до Р. Х., написалъ 12 книгъ *о хордахъ*; книги эти не дошли до насъ: объ нихъ упоминаетъ *Ѳеонъ Александрійскій*. Систематическое изложеніе сферической геометріи, составленное *Ѳеодосіемъ*, современникомъ Цицерона (сферика Ѳеодосія Триполійскаго, около 60 л. до Р. Х), заключаетъ въ себѣ древнѣйшія, извѣстныя намъ изысканія по этому предмету. Въ III книгѣ этого сочиненія находятся предложенія до того затруднявшія древнихъ геометровъ, что *Паппусъ* почелъ необходимымъ написать къ ней комментаріи. Замѣчательны также изысканія, предложенныя *Менелаемъ* (въ концѣ 1-го столѣтія по Р. Х.). Полнѣйшее изъ древнихъ сочиненій по этому предмету, Almageste (Великая книга) Птоломея (около 140 л. по Р. Х), должно быть отнесено къ сферической тригонометріи. Птоломей, какъ полагаютъ, заимствовалъ многое изъ книгъ Гиппарха. Сферика древнихъ была значительно пополнена трудами новѣйшихъ геометровъ: *Віеты*, *Шнелліуса Жирара*, *Лекселл* и *Ейлера*.

перпендикулярная къ плоскости EF круга шара, называется *осью* этого круга шара. Концы оси P, P′ называются *полюсами*. Изъ этихъ опредѣленій понятно: что каждый изъ полюсовъ находится на равномъ разстояніи отъ всѣхъ точекъ окружности; дуги PC′, PD′ большихъ круговъ, соединяющія полюсъ съ какою либо точкою окружности, равны между собою; дуги PC,PD большихъ круговъ, соединяющія полюсъ съ точками C, D другаго большаго круга, равны 90°. 2. Ось круга шара удовлетворяетъ слѣдующимъ пяти условіямъ: a) проходитъ черезъ центръ g круга шара, b) черезъ центръ шара, c) черезъ оба полюса и d) находится на прямой, перпендикулярной къ плоскости; слѣдовательно если два изъ этихъ условій существуютъ, то необходимо существуютъ и остальныя три; такъ наприм.: a) прямая, проходящая черезъ центръ круга шара и черезъ центръ шара, пройдетъ и черезъ оба полюса и будетъ перпендикулярна къ плоскости этого круга шара, b) прямая, соединяющая центръ шара съ однимъ изъ полюсовъ, пройдетъ черезъ центръ круга шара и будетъ перпендикулярна къ плоскости этого круга. 3. Большой кругъ CP шара, проходящій черезъ полюсъ P другаго большаго круга AB, перпендикуляренъ къ этому второму кругу, и обратно, всякій большой кругъ CD, перпендикулярный къ другому кругу AB, пройдетъ черезъ полюсъ P этого послѣдняго круга.

*Примѣчаніе.* Построеніе угловъ и перпендикуляровъ на поверхности шара, а также дѣленіе дугъ и сферическихъ угловъ пополамъ, проведеніе дугъ перпендикулярныхъ къ другимъ дугамъ и проч. производится какъ и въ планиметріи. Такъ какъ въ сферической геометріи и въ сферической тригонометріи разсматриваются преимущественно фигуры, состоящія изъ дугъ большихъ круговъ шара, то мы и обратимъ особенное вниманіе на задачи и теоремы, относящіяся къ этимъ кругамъ.

**Задача.** *Данной дуги большаго круга шара отыскать полюсъ (черт. 1).*

*Рѣшеніе.* Полюсъ P дуги AB даннаго большаго круга шара можетъ быть отысканъ слѣдующимъ образомъ:

a) Помощію пересѣченія двухъ дугъ CP, DP большаго круга шара, перпендикулярныхъ къ данной дугѣ, и возставленныхъ изъ точекъ C,D, разстояніе между которыми не равно 180°.

b) Помощію пересѣченія двухъ дугъ CP, DP большаго круга шара, изъ которыхъ каждая равна 90°, и которыя описаны

изъ точекъ C, D, находящихся между собою на разстояніи большемъ или меньшемъ 180°.

c) Помощію дуги большаго круга шара CP, перпендикулярной къ данной дугѣ AB, если отъ основанія C, по перпендикуляру CP, отложимъ дугу въ 90°.

2) **О сферическомъ углѣ.** *Уголъ заключенный между дугами двухъ большихъ круговъ, называется сферическимъ. Точка встрѣчи большихъ круговъ называется вершиною угла, а самыя дуги— сторонами его.*

### Теорема 1.

*Сферическій уголъ равенъ углу наклоненія плоскостей его сторонъ, а потому измѣряется плоскимъ угломъ ему соотвѣтствующимъ, или дугою большаго круга шара, заключенною между его сторонами, и описанною изъ его вершины какъ полюса.*

*Доказательство.* Такъ какъ дуги PC, PD большихъ круговъ (черт. 1) лежатъ на плоскостяхъ PCP′, PDP′ даннаго двуграннаго угла CPP′D и имѣютъ одинакое направленіе съ касательными къ нимъ проведенными, то понятно, что сферическій уголъ CPD равенъ углу наклоненія плоскостей CP и DP′, слѣдовательно имѣетъ мѣрою плоскій уголъ CoD, соотвѣтствующій двугранному углу при ребрѣ PP′. Но плоскій уголъ CoD измѣряется дугою CD, содержимою между сторонами даннаго сферическаго угла, и описанною изъ вершины P, какъ полюса.

*Примѣчаніе 1.* Сферическіе углы, смотря по плоскимъ угламъ имъ соотвѣтствующимъ, раздѣляются на *прямые*, *острые* и *тупые*.

*Примѣч. 2.* Изъ доказанной нами теоремы видно, что сферическіе углы могутъ быть сравниваемы между собою помощію плоскихъ угловъ имъ соотвѣтствующихъ, а потому къ сферич. угламъ могутъ быть примѣнены доказанныя въ планиметріи теоремы о суммѣ двухъ или нѣсколькихъ прилежащихъ угловъ, имѣющихъ общую вершину, а также объ углахъ противоположныхъ при вершинѣ, и проч.

3) **О сферическихъ треугольникахъ.** Часть поверхности шара, содержимая въ трехъ дугахъ большихъ круговъ, называется *сферическимъ треугольникомъ.* Дуги большихъ круговъ, составляющія треугольникъ, называются *сторонами* его. Треугольникъ, въ которомъ есть прямой уголъ, называется *прямоугольнымъ*;

треугольникъ, въ которомъ есть сторона равная четверти окружности, или 90°, называется *четвертнымъ.* Треугольникъ, въ которомъ нѣтъ ни прямаго угла, ни дуги въ 90°, называется *косвенноугольнымъ.*

4) **Взаимная связь между сферическимъ треугольникомъ и треграннымъ угломъ, ему соотвѣтствующимъ.** Если вершину 0 трегранного угла OABC примемъ за центръ (черт. 2) и произвольнымъ радіусомъ опишемъ шаровую поверхность, пересѣкающую ребра этого угла въ точкахъ A, B, C, а грани — въ дугахъ AB, AC, BC, то на поверхности шара составится сферическій треугольникъ ABC. Углы этого треугольника будутъ соотвѣтствовать двуграннымъ угламъ при ребрахъ OA, OB, OC, а стороны AB = c, BC = a, AC = b будутъ соотвѣтствовать плоскимъ угламъ AOB, BOC, AOC даннаго трегранного угла.

5) **Опредѣленіе сферической тригонометріи.** Сферическая тригонометрія имѣетъ цѣлію по достаточному числу данныхъ въ треугольникѣ опредѣлять или вычислять остальныя [illegible].

Зная взаимную связь между треграннымъ угломъ и сферическимъ треугольникомъ, ему соотвѣтствующимъ, нетрудно доказать слѣдующія теоремы:

**Теорема 2.**

*Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ:*

1. *Сумма всякихъ двухъ сторонъ больше третьей*, т. е. $\smile AB + \smile AC > \smile BC$.

2. *Сумма трехъ сторонъ меньше окружности круга или 360°*, т. е. $\smile AB + \smile AC + \smile BC < 360°$.

*Доказат. на 1-ое* Во всякомъ трегранномъ углѣ (черт. 2) $\angle AOB + \angle AOC > \angle BOC$, но уг. $AOB = \smile AB$, уг. $AOC = \smile AC$, уг. $BOC = \smile BC$, подставивъ, получимъ
$\smile AB + \smile AC > \smile BC$.

*Доказат. на 2-ое.* Во всякомъ трегранномъ углѣ (черт. 2) $AOB + BOC + AOC < 4d$; вмѣсто равныхъ подставивъ равныя, получимъ
$\smile AB + \smile BC + \smile AC < 360°$.

*Примѣч.* Всѣ свойства, которыя въ слѣдующихъ теоремахъ будутъ нами выведены для сферическихъ треугольниковъ, могутъ быть отнесены и къ треграннымъ угламъ.

### Теорема 3.

Если вершины угловъ A, B, C даннаго сфер. треугольника примемъ за полюсы и опишемъ дуги большихъ круговъ, то черезъ пересѣченіе этихъ дугъ составится новый сферическій треугольникъ $A'B'C'$, *полярный данному* (черт. 3).

Главныя свойства полярныхъ треугольниковъ состоятъ въ слѣдующемъ:

1) *Если вершины угловъ перваго суть полюсы дугъ втораго, то и обратно вершины угловъ втораго суть полюсы дугъ перваго.*

2) *Уголъ одного вмѣстѣ съ противолежащею ему стороною другаго составляютъ* 180°.

*Доказательство на 1.* Точка B есть полюсъ дуги $A'C'$, слѣд. $\smile A'B = 90°$; точка C есть также полюсъ дуги $A'B'$, слѣдоват. $\smile A'C = 90°$, а потому точка $A'$, отстоящая отъ двухъ точекъ B и C на 90°, есть полюсъ дуги BC. Такимъ же образомъ докажемъ, что и остальныя вершины $B'$ и $C'$ соотвѣтственно суть полюсы дугъ AC и AB.

*Доказательство на 2.* Продоливъ дуги AB, AC до пересѣченія ихъ съ дугою $B'C'$ въ точкахъ D, E,

$$\left.\begin{array}{rl} \text{получимъ} & \smile B'E = 90° \\ & \smile DC' = 90° \\ \text{слѣд.} \smile B'E + & \smile DC' = 180°, \\ \text{откуда} \smile DE + & \smile B'C' = 180°. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Но какъ } \angle A = \smile DE, \\ \smile B'C' = a', \\ \text{то и получимъ} \\ \angle A + \smile a' = 180°. \end{array}$$

Также докажемъ, что $B + b' = 180°$, $C + c' = 180°$.

Продоливъ дугу BC до пересѣченія ея съ дугами $A'B'$, $A'C$ въ точкахъ F, G, подобнымъ же образомъ докажемъ, что $A' + a = 180°$.

*Слѣдствіе 1. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ сумма трехъ угловъ болѣе 180°, и менѣе 540°.*

*Доказательство.* Данному сферическому треугольнику ABC начертивъ полярный $A'B'C'$ (черт. 3),

$$\left.\begin{array}{rl} \text{получимъ} & A + a' = 180° \\ & B + b' = 180° \\ & C + c' = 180° \\ A + B + C + & a' + b' + c' = 540°. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Слѣд. сумма угл.} \\ A + B + C < 540°. \end{array}$$

Но $a' + b' + c' < 360°$,
отнимая, получимъ $A + B + C > 180°$.

*Примѣчаніе.* Поэтому сферическій треугольникъ можетъ имѣть одинъ прямой уголъ, или *одинъ* тупой, *два* прямыхъ уг-

ла (треугольникъ *двухпрямоугольный*, *birectangle*), или *два* тупыхъ; также *три* прямыхъ (треугольникъ *трехпрямоугольный*, *trirectangle*), или *три* тупыхъ.

*Слѣдствіе 2. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ избытокъ суммы двухъ угловъ предъ третьимъ менѣе 180°.*

*Доказательство.* Сдѣлавъ тоже построеніе, какъ и въ 1-мъ слѣдствіи, изъ полярнаго △ A′B′C′ получимъ $a' + b' > c'$, вмѣсто $a'$, $b'$, $c'$ подставивъ $180^0 - A$, $180°-B$, $180°-C$, получимъ $A + B - C < 180°$.

### ТЕОРЕМА 4.

*Два сферическіе треугольника, начерченные на томъ же шарѣ, или на равныхъ шарахъ, равны:*

*1. Когда имѣютъ по равному углу, содержимому въ сторонахъ равныхъ порознь.*

*2. Когда имѣютъ по равной сторонѣ, прилежащей къ угламъ равнымъ порознь.*

*3. Когда три стороны одного равны тремъ сторонамъ другаго порознь.*

*4. Когда три угла одного равны тремъ угламъ другаго порознь.*

Первые три случая доказываются какъ и въ геометріи на плоскости, четвертый же случай, не имѣющій мѣста въ прямолинейной геометріи, доказывается слѣдующимъ образомъ:

*Доказат. на 4 случ.* Даннымъ треугольникамъ начертивъ полярные (черт. 4), и, по предыдущей теоремѣ соотвѣтственно обозначая стороны и углы, получимъ

| | |
|---|---|
| $A + d = 2$ прям. | слѣд. △ DEF = △ D′E′F′, |
| $A' + d' = 2$ прям. | а потому $D = D'$, $F = F'$, $E = E'$. |
| $A + d = A' + d'$ | Но $D + a = D' + a'$ |
| но $A = A'$ | и $D = D'$, |
| слѣд. $d = d'$. | слѣд. $a = a'$. |
| Такъ же докажу, что | Такъ же докажу, что |
| $f = f'$ и $e = e'$. | $c = c'$ и $b = b'$ (*). |

*Примѣч.* Если стороны и углы одного треугольника равны сторонамъ и угламъ другаго порознь, но равныя величины расположены не одинакимъ образомъ, то такіе треугольники не мо-

(*) Предлагаемъ учащимся доказать эту теорему безъ помощи полярныхъ треугольниковъ.

гутъ быть одинъ на другой налагаемы, и называются *симетрическими*.

### ТЕОРЕМА 5.

*Симетрически равные треугольники площадями равны.*

*Доказат.* Около данныхъ треугольниковъ ABC, abc описавъ малые круги (черт. 5, № 1), и соединивъ полюсы этихъ круговъ съ вершинами данныхъ треугольниковъ, получимъ, что каждый изъ данныхъ треугольниковъ раздѣлится на равнобедренные сферическіе треугольники, которые могутъ быть наложены одинъ на другой: такъ △ AOC = △ aoc,
△ AOB = △ aob и △ BOC = △ boc, слѣдовательно и
AOB + BOC + COA = aob + boc + coa, или
△ ABC = △ a b c.

Если полюсы малыхъ круговъ будутъ находиться внѣ данныхъ треугольниковъ (черт. 5, № 2), то получимъ
AOB + BOC — AOC = aob + boc — aoc,
откуда △ ABC = △ a b c.

### ТЕОРЕМА 6.

*Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC : 1) равнымъ сторонамъ a и c противолежатъ равные углы* A *и* C,

*и обратно*, 2) *равнымъ угламъ* A *и* C *противолежатъ равныя стороны a, c.*

*Доказат. на 1-е.* Раздѣливъ пополамъ уголъ B, заключенный между равными сторонами (черт. 6), получимъ равные треугольники ABD и DBC, въ которыхъ уг. A = уг. C.

*Доказат. на 2-е.* Пусть B = C, говорю, что *b* = *c*.

Данному треугольнику начертивъ полярный DEF (черт. 6, №2), получимъ

| | |
|---|---|
| B + e = C + f; | но E + b = F + c, |
| но B = C, | притомъ E = F, |
| слѣд. e = f, | слѣд. b = c. |
| а потому и E = F; | |

### ТЕОРЕМА 7.

*Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ:* 1) *большему углу*

*противолежитъ бо́льшая сторона;* 2) *и обратно, бо́льшей сторонѣ противолежитъ бо́льшій уголъ.*

*Доказат. на 1-е.* Пусть уг. B > уг. A, говорю, что b > a. На сторонѣ AB, прилежащей даннымъ угламъ (черт. 7, № 1), при вершинѣ бо́льшаго угла B, построивъ ∠ DBA = ∠ DAB, получимъ AD = DB; но BD + DC > BC; подставивъ, найдемъ, что

$$AD + DC > BC,$$

$$\text{или } AC > BC.$$

*Доказат. на 2-е.* Пусть AB > AC, говорю, что C > B.

Данному треугольнику начертивъ полярный DEF, получимъ (черт. 7, № 2).

| | |
|---|---|
| $c + F = 2$ прям. | но $f + C = 2$ прям. |
| $b + E = 2$ прям. | и $e + B = 2$ прям. |
| $c + F = b + E$; | $f + C = e + B$; |
| но $c > b$, | $f < e$, |
| слѣд. $F < E$, а потому и $f < e$; | слѣд $C > B$. |

*Прибавленіе.* Предлагаемъ учащимся доказать слѣдующія свойства сферическихъ треугольниковъ:

1. *Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ каждый изъ косвенныхъ угловъ одинакъ* (*) *со стороною ему противолежащею, и обратно.*

2. *Если сумма двухъ сторонъ сферическаго треугольника равна, болѣе или менѣе 180°, то и сумма угловъ, противолежащихъ этимъ сторонамъ, соотвѣтственно равна, болѣе или менѣе 180°, и обратно.*

*Примѣч.* Мы не предлагаемъ синтетическаго доказательства теоремъ изложенныхъ въ прибавленіи, потому что свойства эти могутъ быть весьма легко выведены какъ слѣдствія изъ общихъ формулъ сферической тригонометріи.

### ОБЪ ИЗМѢРЕНІИ ПОВЕРХНОСТЕЙ СФЕРИЧЕСКИХЪ ФИГУРЪ.

Часть поверхности шара, содержимая между тремя дугами большихъ круговъ, пересѣкающихся по двѣ, называется *поверхностію сферическаго треугольника.*

*Мѣрою поверхности* сферическихъ фигуръ принимаютъ или *поверхность сферическаго трехъ прямоугольнаго треугольника,*

(*) Уголъ и сторона называются *одинакими* если какъ уголъ, такъ и сторона одновременно меньше 90°, или каждая изъ величинъ равна 90°, или каждая больше 90°. Въ противномъ же случаѣ величины эти называются относительно *неодинакими.*

составляющая 8-ю часть пов. шара (октантъ, triangle trirectangle); или *градусъ сферической поверхности*, т. е. такой сф. треугольникъ, у котораго двѣ стороны каждая по 90°, а третья равна одному градусу б. кр. шара (*); или наконецъ *одноградусный сферическій двусторонникъ*, т. е. такой двусторонникъ, котораго каждая сторона равна 180°, а уголъ между ними въ одинъ градусъ. (**)

Въ геометріи уже доказано было, что *пов. сфер. двусторонника относится къ пов. шара, какъ уголъ двусторонника къ 360°, или какъ дуга б. круга, измѣряющая сф. уголъ двусторонника, относится къ окружности б. круга;* поэтому, обозначивъ черезъ P поверхн. шара, а черезъ A сфер. уголъ двусторонника, получимъ, что пов. сф. двусторон. $A = \frac{A}{360°} \cdot P$; но какъ $P = 4\pi r^2$, $360° = 2\pi$, то, при $r = 1$, пов. двуст. $A = 2A$, т. е. *поверхн. двусторонника имѣетъ двойное число градусовъ, заключающихся въ дугѣ его измѣряющей.*

*Примѣчаніе.* Два противоположные сферическіе двусторонника CAFBC и CEFDC (черт. 7), т. е. имѣющіе по равному углу C, третьимъ большимъ кругомъ ABDE разсѣкаются каждый на два треугольника, которые взаимно равны по два, а именно △ AFB = △ DCE, △ ABC = △ DEF.

*Доказат.* $\smile FBC = \smile BCE$ и $\smile FAC = \smile ACD$ | отнимая,
$\smile BC = \smile BC$ и $\smile AC = \smile AC$ | получ.

$\smile FB = \smile CE$, $\smile FA = \smile CD$

притомъ сф. уг. AFB = сф. уг. ECD, слѣд. △ AFB = △ ECD, также докажемъ, что и △ ACB = △ EFD.

**Теорема 8.** *Поверхность сферическаго треугольника относится къ поверхности шара какъ избытокъ суммы трехъ угловъ треугольника безъ 180° относится къ 720°.*

*Доказат.* Продолживъ стороны даннаго треугольника ABC до цѣлыхъ окружностей, получимъ, что окружности эти вторично пересѣкутся въ точкахъ D, E, F. Обозначивъ черезъ P поверхность шара, получимъ (черт. 7)

---

(*) Такихъ градусовъ въ поверхности шара 720.

(**) Такихъ двусторонниковъ въ пов. шара 360.

$$\left.\begin{array}{l} \text{п. сф. двуст. } BAECB = \triangle ABC + \triangle ACE = P\,\frac{A}{360^\circ} \\ \text{п. сф. двуст. } ABDCA = \triangle ABC + \triangle BDC = P\,\frac{B}{360^\circ} \\ \text{п. сф. двуст. } CAFBC = \triangle ABC + \triangle ECD = P\,\frac{C}{360^\circ} \end{array}\right\} \text{Слагая, получимъ.}$$

$$2\triangle ABC + \underbrace{\triangle ABC + \triangle ACE + \triangle BDC + \triangle ECD}= P\left(\frac{A+B+C}{360^\circ}\right);$$

но $\triangle ABC + \triangle ACE + \triangle BDC + \triangle ECD = \frac{1}{2}P$, слѣд.

$$2\triangle ABC + \tfrac{1}{2}P = P\left(\frac{A+B+C}{360^\circ}\right), \text{ откуда}$$

$$2\triangle ABC = P\left(\frac{A+B+C}{360^\circ} - \tfrac{1}{2}\right) = P\left(\frac{A+B+C-180^\circ}{360^\circ}\right),$$

наконецъ $\triangle ABC = P\left(\frac{A+B+C-180^\circ}{720^\circ}\right)$. (*)

*Слѣдствіе.* Извѣстно, что пов. шара $P = 720$ гр. сф. пов. откуда 1 град. сф. пов. $= \frac{P}{720}$, слѣд.

$$\triangle ABC = A + B + C - 180^\circ.$$

т. е. поверхн. сф. треугольника заключаетъ въ себѣ столько градусовъ сф. пов. сколько находится обыкновенныхъ градусовъ въ суммѣ угловъ сф. треугольника безъ 180°.

Величина $A + B + C - 180^\circ = \varepsilon$ называется *сферическимъ избыткомъ треугольника.*

*Численные примѣры.* 1. Найти пов. сф. $\triangle ABC$, котораго $A = 65^\circ$, $B = 125^\circ$, $C = 140^\circ$.

*Рѣш.* По отысканнымъ формуламъ найдемъ

$\triangle ABC = 65^\circ + 125^\circ + 140^\circ - 180^\circ = 150$ гр. сф. пов.; относя къ цѣлой поверхности шара, получимъ

$$\frac{\triangle ABC}{P} = \frac{150}{720} = \frac{5}{24}; \text{ т. е. } \triangle ABC = \frac{5}{24} \text{ пов. шар.};$$

относя къ трехпрямоугольному треугольнику T (trirect.),

получимъ $\frac{\triangle ABC}{T} = \frac{150}{90} = \frac{5}{3}$, т. е. $\triangle ABC = \frac{5}{3}T$.

(*) Теорема эта принадлежитъ Альберту Жирару (Alb. Girard); мы доказали ее основываясь на способѣ, предложенномъ математикомъ Каваллери (Cavalleri).

Подробное изложеніе сферической геометріи можно найти въ сферикѣ Schulz и въ тригонометріи Pfleiderer.

*Примѣръ* 2. Даны $A = 43° 20'$; $B = 79° 9' 39''$; $C = 82° 34' 26''$; опредѣлить пов. сф. треугольника.

*Рѣш*. Сфер. избыт. $= A + B + C - 180° = 25°4'5''$; $P =$ пов. шар.

$$\triangle ABC = \frac{25° \ 4' \ 5''}{720°} P = \frac{90245}{2592000} P = 0{,}034817 \ P.$$

**Теорема 9.** *Поверхность сферическаго многоугольника равна избытку суммы всѣхъ угловъ многоугольника предъ 180° столько разъ взятыми, сколько въ многоугольникѣ сторонъ безъ двухъ.*

*Доказат.* Всякій многоугольникъ діагоналями, проведенными изъ вершины одного изъ угловъ, раздѣляется на столько треугольниковъ, сколько въ многоугольникѣ сторонъ безъ двухъ; слѣдовательно, если въ многоугольникѣ $n$ сторонъ, то треугольниковъ будеeъ $n - 2$ (черт. 8).

$$\left.\begin{aligned} \text{Но } \triangle ABC &= a + B + c - 180° \\ \triangle ACD &= a' + d + c' - 180° \\ \triangle AED &= a'' + d' + E - 180° \end{aligned}\right\} \text{ слагая, получимъ}$$

. . . . . . и. т. д.

Пов. сф. мн. $ABCDE = [s - 180° \ (n - 2)] = \varepsilon'$, гдѣ $s$ есть сумма всѣхъ угловъ многоугольника, а $n$ число сторонъ его.

Величина $\varepsilon'$ называется *сферическимъ избыткомъ многоугольника*.

## § 2.

## СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

### ТЕОРЕМЫ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ВЫЧИСЛЕНІЮ ПРЯМОУГОЛЬНЫХЪ СФЕРИЧЕСКИХЪ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

**1) Число возможныхъ случаевъ при рѣшеніи прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ** (*). Обозначая черезъ $A$ прямой уголъ сферическаго треугольника, а черезъ $a$ гипотенузу, получимъ, что пять величинъ $a$, $b$, $c$, $B$, $C$, будучи взяты по три, даютъ $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ различныхъ соединеній: $abc$, $abB$, $abC$, $acB$,

(*) 1) Изъ сочиненій Птоломея *о рѣшеніи треугольниковъ* видно, что древніе рѣшали ихъ помощію *хордъ*. Если наприм. черезъ A, B, C назовемъ углы прямолинейнаго треугольника въ кругѣ вписаннаго, а черезъ a, b, c его стороны, или хорды, то хорды эти будутъ соотвѣтствовать дугамъ, измѣряющимъ двойные углы 2A, 2B, 2C; слѣдовательно получимъ

acC, aBC, bcB, bcC, bBC, cBC. Но, при вычисленіи треугольниковъ, случай acB рѣшается по тѣмъ же формуламъ какъ и abC, также acC и abB, bcC и bcB, и cBC и bBC, такъ что совершенно различныхъ случаевъ при рѣшеніи прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ можетъ быть неболѣе *шести*, а именно:

| | Данныя | Искомыя |
|---|---|---|
| I. | b, c; | a, B, C; |
| II. | a, b; | c, B, C; |
| III. | b, C; | a, c, B; |
| IV. | a, B; | b, c, C; |
| V. | b, B; | a, c, C; |
| VI. | B, C; | a, b, c. |

---

a : b = хорд. 2A : хорд. 2B . . . . . (1), т. е. *стороны треугольника относятся между собою какъ хорды двойныхъ угловъ имъ противолежащихъ.* Если бы, напримѣръ, по двумъ сторонамъ a, b треугольника и по углу A требовалось отыскать уголъ B, то удвоивъ уголъ A, отыскали бы по таблицамъ хорду дуги 2A. Въ пропорціи (1) будутъ извѣстны три члена, по которымъ отыщемъ четвертый, т. е. хорду дуги 2B. Зная хорду, найдемъ по таблицамъ величину 2B, а слѣдоват. и уголъ B.

Послѣ предварительныхъ изысканій древнихъ въ *сферикѣ*, исторія *сферической тригонометріи* находится въ тѣсной связи съ исторіею *тригонометріи прямолинейной.*

2) Введеніе *синусовъ*, вмѣсто хордъ, приписываютъ аравитянину *Магометъ-Бенъ-Музу*, или другому, еще болѣе извѣстному аравійскому математику *Геберъ-Бенъ-Афла* (въ XI вѣкѣ). Примѣненіе *тангенсовъ* къ рѣшенію треугольниковъ должно было еще болѣе облегчить и упростить вычисленія.

Преобразователемъ сферической тригонометріи должно, по справедливости, почесть *Регіомонтана*: имъ составлены (около половины XV вѣка) таблицы тригонометрическихъ линій на каждый градусъ и минуту для первой четверти, при радіусѣ = 1000000.

Написанное имъ сочиненіе о треугольникахъ (въ 5 книгахъ) содержитъ въ себѣ подробное изложеніе прямолинейной и сферической тригонометрій: тутъ собраны были почти всѣ извѣстные тогда синтетическіе пріемы для рѣшенія треугольниковъ.

3) Значительное измѣненіе въ этой наукѣ должно было произойти отъ примѣненія логариѳмовъ, введенныхъ *Неперомъ* (1614 г) и приспособленныхъ къ вычисленію *Бриггомъ* (1624 г.).

*Эйлеръ* показалъ способъ аналитически выводить всѣ необходимыя уравненія сферической тригонометріи изъ одного главнаго, и, такимъ образомъ, привелъ науку къ меньшему числу началъ (Mém. de Berlin 1753, p. 233; Acta Petropolit. 1778,I). Тригонометрія, изложенная по системѣ Эйлера, съ небольшими измѣненіями помѣщена въ курсѣ Лакроа. Дальнѣйшими усовершенствованіями своими сферическая тригонометрія обязана трудамъ *Лагранжа* (Journ. de l'ec. Polyt., cahier 6, p. 280), *Деламбра* (Astron. par Delambre, T. I), *Лежандра* (Géom.), *Каньёли*, *Бертрана*, *Дингера*, *Серре* и другихъ.

Выводъ формулъ соотвѣтствующихъ для каждаго изъ этихъ случаевъ основанъ на слѣдующихъ теоремахъ:

**ТЕОРЕМА 1.**

*Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ косинусъ гипотенузы равенъ произведенію косинусовъ двухъ прочихъ сторонъ*, т. е. Cos a = Cos b. Cos c.

*Доказательство.* Вершины A, B, C даннаго треугольника соединивъ съ центромъ O шара, получимъ трегранный уголъ OABC (черт. 9). Изъ вершины C одного изъ косвенныхъ угловъ на ребра OA и OB опустивъ перпедникуляры CD, CE, и проведя DE получимъ, что уг. DEO есть прямой, слѣд. уг. CED есть плоскій, соотвѣтсвующій двугранному при ребрѣ OB, и потому служитъ мѣрою сферич. углу CBA. Помощію этого построенія получимъ четыре прямоугольные треугольника CDO, CDE, CEO и DEO. Но OD = Cos DOC = Cos b; OE = Cos COE = Cos a, притомъ въ треугольникѣ DOE уголъ DOE = c.

Изъ тогоже треугольника получаемъ

$$\text{Cos DOE} = \frac{OE}{OD}, \text{ или } \text{Cos c} = \frac{\text{Cos a}}{\text{Cos b}},$$

откуда Cos a = Cos b. Cos c.

*Примѣч. 1.* Хотя теорема эта, по чертежу, доказана для прямоугольнаго треугольника, въ которомъ каждая изъ сторонъ менѣе 90°; но справедливость этого вывода не трудно доказать и для всѣхъ другихъ случаевъ.

*Примѣч. 2.* Изслѣдуя уравненіе Cos a = Cos b. Cos c, находимъ, что Cos a будетъ положительнымъ, когда Cos b и Cos c съ одинакими знаками, и Cos a будетъ отрицательнымъ, если Cos b и Cos c съ разными знаками, т. е.

| Cos a | = | Cos b. | Cos c. |
|---|---|---|---|
| + | | + . | + |
| | | — . | — |
| — | | + . | — |
| | | — . | + |

Отсюда получаемъ, что *во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ гипотенуза* < 90°, *когда оба катета одинаки, т. е. оба болѣе, или оба менѣе* 90°; *и гипотенуза* > 90°, *когда оба катета неодинаки*, т. е. одинъ изъ нихъ >, а другой

$< 90°$, и *обратно.* Наконецъ *если одна изъ сторонъ* $b$, *или* $c$ *равна* $90°$, *то и гипотенуза* $= 90°$.

*Примѣч. 3,* Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ число сторонъ бо̀льшихъ $90°$ необходимо должно быть четное.

### ТЕОРЕМА 2.

*Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ синусъ одного изъ острыхъ угловъ равенъ синусу стороны противолежащей этому углу, раздѣленному на синусъ гипотенузы*, т. е. $\text{Sin } B = \frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } a}$.

*Доказательство.* Изъ плоскаго прямоугольнаго треугольника CED (черт. 9) получимъ

$$\text{Sin } CED = \frac{CD}{CE}, \text{ но } \angle\ CED = B;\ CD = \text{Sin } b;\ CE = \text{Sin } a,$$

$$\text{слѣдовательно } \text{Sin } B = \frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } a}.$$

*Изслѣдованіе полученной формулы.*

1. Такъ какъ Sin B всегда должен быть $\leqq 1$, то и $\frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } a} \leqq 1$, т. е. что *синусъ стороны не можетъ быть болѣе синуса гипотенузы.* Отсюда, если сторона и гипотенуза въ первой четверти, то сторона должна быть менѣе гипотенузы; если же сторона и гипотенуза во второй четверти, то необходимо, чтобы сторона была болѣе гипотенузы.

Наконецъ, если $b < 90°$, но $a > 90°$, то $a + b < 180°$,
если $b > 90°$, $a < 90°$, то $a + b > 180°$.

2. Изъ этой же формулы получаемъ, что $\text{Sin } a = \frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } B}$; но какъ Sin a всегда $\leqq 1$, то для возможности рѣшенія необходимо, чтобы *синусъ стороны былъ не болѣе синуса угла ей противолежащаго.*

—

Формулы, показывающія взаимную связь между остальными частями сферическаго прямоугольнаго треугольника могутъ быть легко выведены или помощію подобныхъ же геометрическихъ

построеній, для каждаго частнаго случая особенно, или изъ общихъ формулъ сферическихъ треугольниковъ (что и будетъ объяснено въ слѣдующихъ § §); чаще же всего правила эти предлагаются въ двухъ *мнемоническихъ теоремахъ Непера*, упрощенное доказательство которыхъ, — основанное на свойствахъ *сферическаго пятиугольника*, — мы здѣсь и предлагаемъ.

### Сферическій пятиугольникъ.

Теорема. Если продолжимъ стороны прямоугольнаго сферическаго треугольника, (см. политип.) и, взявъ вершины угловъ при гипотенузѣ, за полюсы, опишемъ дуги великихъ круговъ, то черезъ пересѣченіе этихъ дугъ съ продолженными сторонами прямаго угла, составится сферическій пятиугольникъ (который мы назовемъ полярнымъ данному прямоугольному сферическому треугольнику); главныя свойства этого пятиугольника состоятъ въ слѣдующемъ:

1) На каждой сторонѣ пятиугольника *BCHJK*, чрезъ продолженіе двухъ другихъ сторонъ, къ ней прилежащихъ, составятся прямоугольные треугольники.

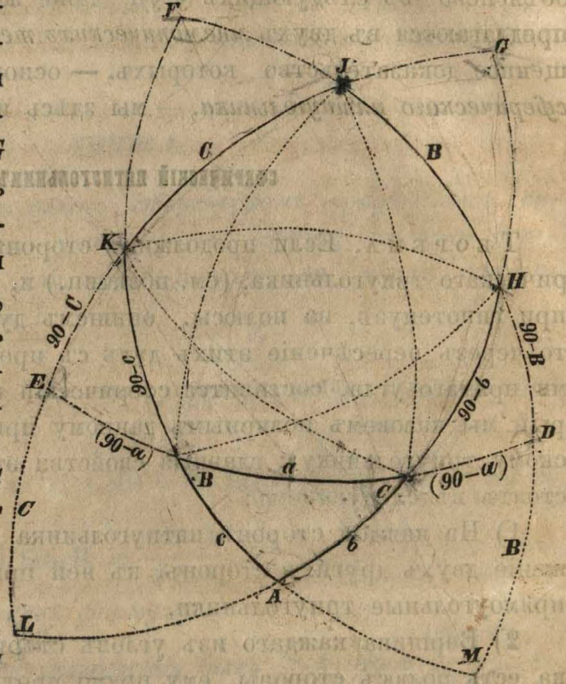
2) Вершина каждаго изъ угловъ сферическаго пятиугольника есть полюсъ стороны, ему прямо противулежащей.

3 Основаніе этого пятиугольника есть гипотенуза даннаго, основнаго треугольника; прилежащія къ ней двѣ стороны пятиугольника суть дополненія до 90° остальныхъ двухъ сторонъ треугольника, послѣднія же двѣ стороны пятиугольника равны двумъ косвеннымъ (*) угламъ, (прилежащимъ къ гипотенузѣ) даннаго треугольника.

Построеніе пятиугольника. Стороны *AB* и *AC*, содержащія прямой уголъ, продолжу за гипотенузу, по направленію дугъ *ABF* и *ACG* (см. полит.); гипотенузу, *BC* продолжу въ обѣ стороны, и отложивъ $CE = 90°$ и $BD = 90°$, проведу дуги *EG* и *DF* перпендикулярно къ дугѣ *ED*, и продолжу ихъ до пересѣченія со сторонами прямаго угла, въ точкахъ *F* и *G*. Такимъ образомъ составится сферическій пятиугольникъ *BCHJK*, котораго всѣ стороны суть дуги большихъ круговъ.

(*) Углы при гипотенузѣ сферическаго треугольника мы будемъ называть *косвенными*; если же одинъ изъ нихъ есть прямой, или *оба прямые*, то треугольникъ, какъ извѣстно, не требуетъ тригонометрическаго рѣшенія. Сферическій треугольникъ не требуетъ рѣшенія и въ томъ случаѣ, если кромѣ гипотенузы одна изъ сторонъ около прямаго угла равна 90°.

Доказательство на 1). Углы $A$, $E$ и $D$ суть прямые по построенію; надо только доказать, что и углы $F$ и $G$ также прямые; но и это очевидно, потому что точки $B$ и $C$ суть полюсы дугъ $DF$ и $EG$, слѣдовательно дуги $BF$ и $CG$ перпендикулярны къ дугамъ $DF$ и $EG$. Итакъ всѣ триугольники $BEK$, $KFJ$, $JGH$, $HDC$, стоящіе на сторонахъ полученнаго пятиугольника, — суть прямоугольные.




2) Вершины $B$ и $C$ суть полюсы дугъ $DF$ и $EG$, а слѣдовательно и дугъ $HJ$ и $KJ$, — по построенію; отсюда же видно, что и точка $J$ есть полюсъ дуги $ED$, или дуги $BC$. Нетрудно доказать, что точка $K$ есть полюсъ дуги $CH$, потому что дуга $CK = 90°$ (ибо $C$ есть полюсъ дуги $EG$), притомъ $\smile AC < 90°$, слѣдовательно точка $K$, находясь на дугѣ $AK$, перпендикулярной къ $AH$, — при разстояніи $AC$, меньшемъ четверти окружности, — удалена отъ дуги $AH$ на $90°$, то очевидно, что точка $K$ есть полюсъ дуги $CH$. Точно такимъ же образомъ докажемъ, что и точка $H$ есть полюсъ дуги $KB$.

3) Очевидно, что основаніе этого пятиугольника равно гипотенузѣ $a$.

Изъ построенія видно, что $\smile AK = 90°$ (ибо $K$ есть полюсъ дуги $AH$), и $AB = c$, слѣдовательно $KB = 90° - c$. Такимъ же образомъ докажу, что $\smile CH = 90° - b$.

Наконецъ $\smile EJ = 90°$, (точка $J$ есть полюсъ дуги $ED$);
также и $\smile KL = 90°$, (точка $K$ есть полюсъ дуги $LH$);
слѣдоват. $\smile EJ = \smile KL$, а потому $\smile KJ = \smile EL$;
но $\smile EL = \angle C$, слѣдоват. и $\smile KJ = \angle C$.

Такъ же докажу, что и $\smile JH = \smile DM = \angle B$ (*).

—

Присовокупляя къ сему извѣстную тригонометрическую теорему: что *во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ косинусъ гипотенузы равенъ произведенію косинусовъ двухъ прочихъ сторонъ*, т. е.

$$Cos\ a = Cos\ b.\ Cos\ c \ldots\ldots\ldots (\alpha),$$

и, основываясь на свойствахъ сферическаго пятиугольника, нами предложенныхъ, можно доказать слѣдующія два общія правила Непера:

Теорема 1. *Въ сферическомъ пятиугольникѣ BCHJK косинусъ каждой изъ сторонъ равенъ произведенію синусовъ двухъ сторонъ, ей прилежащихъ*, т. е. $Cos\ BC = Sin\ CH.\ Sin\ KB$.

Доказательство. Въ треугольникѣ $ABC$.

$$Cos\ a = Cos\ b.\ Cos\ c \ldots\ldots (\alpha).$$

или $Cos\ BC = Cos\ AC.\ Cos\ AB.$

но $Cos\ AC = Sin\ (90^\circ - AC) = Sin\ CH,$

и $Cos\ AB = Sin\ (90^\circ - AB) = Sin\ KB;$

подставивъ вмѣсто равныхъ равныя, получимъ

$Cos\ BC = Sin\ CH.\ Sin\ KB;$ ч. и д. н.

Докажемъ это же свойство для какой-либо другой стороны сферическаго пятиугольника.

Изъ треугольника $EKB$ имѣемъ $Cos\ KB = Cos\ EK.\ Cos\ BE;$

но $Cos\ EK = Sin\ (90^\circ - EK) = Sin\ KJ,$

и $Cos\ BE = Sin\ (90^\circ - EB) = Sin\ BC;$

подставивъ, получимъ $Cos\ KB = Sin\ KJ.\ Sin\ BC.$

Очевидно, что теорема эта такимъ же образомъ докажется и для каждыхъ трехъ рядомъ лежащихъ сторонъ пятиугольника.

Теорема 2. *Въ сферическомъ пятиугольникѣ BCHJK косинусъ стороны отдѣльно стоящей равенъ произведенію котангенсовъ двухъ сторонъ рядомъ стоящихъ*, т. е.

$$Cos\ BC = Cotg\ JH.\ Cotg\ KJ.$$

Правило вывода, и доказательство формулы:

1) Возьму косинусъ отдѣльно стоящей части (по теор. 1-й);

(*) Теорему эту мы доказали предполагая $b < 90^\circ$ и $c < 90^\circ$; но очевидно, что почти такимъ же образомъ можно доказать изложенныя нами свойства и при другихъ данныхъ, измѣнивъ только чертежъ сообразно съ предложенными условіями.

2) подъ нимъ напишу *обратно* уравненіе сторонъ отдѣльно лежащихъ; 3) перемноживъ эти уравненія, и сокративъ одинаковыхъ множителей въ обѣихъ частяхъ равенствъ, 4) по правиламъ для рѣшенія уравненія опредѣлю косинусъ отдѣльно стоящей стороны.

Выводъ формулы:

(1). . . . $Cos\ BC = Sin\ KB.\ Sin\ CH$

(2) обратно $\begin{cases} Sin\ KB.\ Sin\ JH = Cos\ KJ \\ Sin\ KJ.\ Sin\ CH = Cos\ JH \end{cases}$ Перемноживъ и откинувъ общихъ множит. получимъ:

(3). $Cos\ BC.\ Sin.\ JH.\ Sin\ KJ = Cos\ JH.\ Cos\ KJ$,

(4) откуда $Cos\ BC = \frac{Cos\ JH.\ Cos\ KJ}{Sin\ JH.\ Sin\ KJ}$

или $Cos\ BC = Cotg\ JH.\ Cotg\ KJ$.

Такимъ же образомъ доказывается эта теорема и для каждыхъ трехъ, не рядомъ лежащихъ сторонъ пятиугольника.

Изложенныя нами двѣ теоремы могутъ быть вполнѣ примѣнены и къ прямоугольному сферическому треугольнику, съ тѣмъ только измѣненіемъ, что *рядомъ лежащія стороны пятиугольника (a, 90°—c, 90°—b)*, (теор. 1) *составляютъ не рядомъ лежащія части треугольника (a; c, b)*; и обратно, *одна отдѣльная сторона и двѣ другія, прилежащія между собою стороны пятиугольника (a; B, C)*, (теор. 2) *составляютъ три рядомъ лежащія части треугольника (a, C, B)*.

Отсюда и получаемъ слѣдующія

## МНЕМОНИЧЕСКІЯ ПРАВИЛА НЕПЕРА (*)

для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

—

Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ ABC, у котораго уголъ A прямой (черт. 10), вмѣсто катетовъ b и c поставивъ ихъ дополненія 90°—b и 90°—c, и не обращая вниманія на прямой уголъ A, т. е. не считая его раздѣляющимъ, замѣчаемъ стоятъ ли три части, между которыми желаютъ знать отношеніе:

1) *всѣ три рядомъ*, или

2) *двѣ рядомъ, а одна отдѣльно.*

(*) Нѣкоторые приписываютъ открытіе этихъ правилъ французскому математику Модюи.

**ПРАВИЛО 1.**

*Въ первомъ случаѣ*, т. е. *когда части треугольника смежны: косинусъ средней части равенъ произведенію котангенсовъ крайнихъ частей.*

Рядомъ лежащія части треугольника суть:
B,a,C; a,C,90°—b; C,90°—b, 90°—c; 90°—b, 90°—c, B; 90°—c, B,a;
Первымъ правиломъ Непера пройдя по всѣмъ рядомъ лежащимъ сторонамъ треугольника, взятымъ по три, для всѣхъ различныхъ случаевъ заданія получимъ:

1) $\mathrm{Cos}\, a = \mathrm{Cotg}\, B.\ \mathrm{Cotg}\, C$ $\qquad \mathrm{Cos}\, a = \mathrm{Cotg}\, B.\ \mathrm{Cotg}\, C,$
2) $\mathrm{Cos}\, C = \mathrm{Cotg}\, a.\ \mathrm{Cotg}\, (90^{\circ}-b),$ или $\mathrm{Cos}\, C = \mathrm{Cotg}\, a.\ \mathrm{Tang}\, b,$
3) $\mathrm{Cos}\, (90^{\circ}-b) = \mathrm{Cotg}\, C.\ \mathrm{Cotg}\, (90^{\circ}-c),$ или $\mathrm{Sin}\, b = \mathrm{Cotg}\, C.\ \mathrm{Tang}\, c,$
4) $\mathrm{Cos}\, (90^{\circ}-c) = \mathrm{Cotg}\, B.\ \mathrm{Cotg}\, (90^{\circ}-b),$ или $\mathrm{Sin}\, c = \mathrm{Cotg}\, B.\ \mathrm{Tang}\, b,$
5) $\mathrm{Cos}\, B = \mathrm{Cotg}\, (90^{\circ}-c).\ \mathrm{Cotg}\, a,$ или $\mathrm{Cos}\, B = \mathrm{Tang}\, c.\ \mathrm{Cotg}\, a.$

*Примѣчаніе.* Очевидно, что изъ этихъ пяти отношеній, различныхъ только *три*: 1, 2 и 3; 4-ое отношеніе соотвѣтствуетъ 3-му, а 5-ое — второму.

**ПРАВИЛО 2.**

*Во второмъ случаѣ*, т. е. *когда двѣ части рядомъ, а одна отдѣльно, косинусъ отдѣльно стоящей части равенъ произведенію синусовъ рядомъ стоящихъ частей.*

Не рядомъ лежащія части треугольника суть:
90°—b, 90°—c || a; 90°—c, B || C; B, a || 90°—b;
a, C || 90°—c; C, 90°—b || B.

Пройдя вторымъ правиломъ Непера по каждымъ тремъ не рядомъ лежащимъ частямъ треугольника, получимъ:

1) $\mathrm{Cos}\, a = \mathrm{Sin}\, (90^{\circ}-b).\ \mathrm{Sin}\, (90^{\circ}-c),$ или $\mathrm{Cos}\, a = \mathrm{Cos}\, b.\ \mathrm{Cos}\, c,$
2) $\mathrm{Cos}\, C = \mathrm{Sin}\, (90^{\circ}-c).\ \mathrm{Sin}\, B,$ или $\mathrm{Cos}\, C = \mathrm{Cos}\, c.\ \mathrm{Sin}\, B,$
4) $\mathrm{Cos}\, (90^{\circ}-b) = \mathrm{Sin}\, B.\ \mathrm{Sin}\, a,$ или $\mathrm{Sin}\, b = \mathrm{Sin}\, B.\ \mathrm{Sin}\, a,$
4) $\mathrm{Cos}\, (90^{\circ}-c) = \mathrm{Sin}\, C.\ \mathrm{Sin}\, a,$ или $\mathrm{Sin}\, c = \mathrm{Sin}\, C.\ \mathrm{Sin}\, a,$
5) $\mathrm{Cos}\, B = \mathrm{Sin}\, (90^{\circ}-b).\ \mathrm{Sin}\, C,$ или $\mathrm{Cos}\, B = \mathrm{Cos}\, b.\ \mathrm{Sin}\, C.$

*Примѣчаніе.* Очевидно, что изъ этихъ пяти отношеній различныхъ только *три*: 1, 2 и 3-ье; 4-ое отношеніе соотвѣтствуетъ 3-му, а 5-ое — второму.

Такимъ образомъ изъ обоихъ правилъ находимъ только *шесть* различныхъ отношеній.

| | |
|---|---|
| 1) Cos a = Cos b. Cos c (*), | 4) Cos a = Cotg B. Cotg C, |
| 2) Sin c = Sin a. Sin C, | 5) Sin c = Tang b. Cotg B, |
| 3) Cos C = Cos c. Sin B, | 6) Cos C = Cotg a. Tang b. |

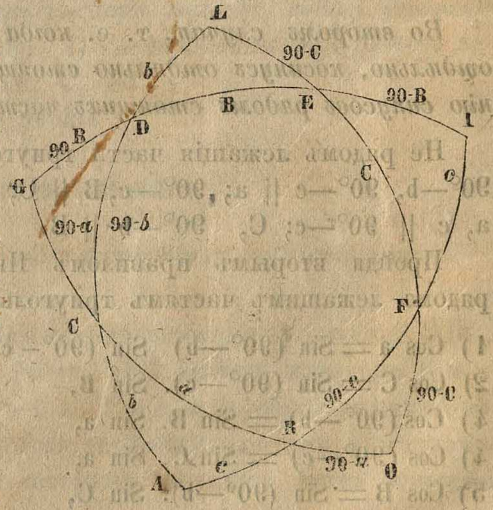
*Примѣч.* 1. Каждая изъ этихъ формулъ можетъ быть доказана, независимо отъ сф. пятиугольника, или помощію геометрическаго построенія, или путемъ аналитическимъ, т. е. какъ слѣдствія, при извѣстныхъ условіяхъ, выводимыя изъ общихъ формулъ сферической тригонометріи.

*Примѣч.* 2. Слѣдующіе примѣры (см. § 3) покажутъ какъ примѣнять эти правила къ вычисленію прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

*Прибавленіе.* Помощію построеній, нами предложенныхъ, кромѣ доказанныхъ уже свойствъ сферическиго полярнаго пятиугольника, соотвѣтствующаго данному прямоугольному треугольнику, открываемъ еше слѣдующее:

1) Каждая изъ діагоналей этого пятиугольника равна 90°, всѣ же пять діагоналей составляютъ четвертной звѣздообразный сферическій пятиугольникъ *BHKCJB*; кромѣ того, черезъ продолженіе сторонъ даннаго пятиугольника получаемъ звѣздообразный прямоугольный сферическій пятиугольникъ AFDEGA.

2) Съ рѣшеніемъ одного сферическаго прямоугольнаго треуг-ка (наприм. *ABC*), черезъ простое сложеніе, или вычитаніе, дополненіями и исполненіями (complément et supplément) рѣшаются *десять* сферическихъ треугольниковъ, изъ которыхъ *пять*: *ABC*, *BEK*, *KFJ*, *JGH*, *DHC*—суть прямоугольные, и *пять*: *JKH*, *JHC*, *HCB*, *CBK* и *BKJ*—четвертные (см. таблицу на концѣ книги).




Уничтожая всѣ вспомогательныя линіи, получимъ, что отъ прямоугольнаго сферическаго треугольника ABC, помощію предложеннаго нами построенія составится звѣздообразный прямоугольный сферическій пятиугольникъ ALOGJA. (см. полит. второй).

**ОБЩІЯ ПРАВИЛА ДЛЯ ОГРАНИЧЕНІЯ.**

При ограниченіи величинъ, какъ данныхъ, такъ и искомыхъ,

(*) Изъ книгъ *Менелая* и *Птоломея* видно, что древнимъ извѣстны были только уравненія: 1, 2, 5, 6. Для рѣшенія косвенноугольнаго треугольника разсѣкали

Къ статьѣ: «Сферическій пятиугольникъ».

Доказательство мнем. правилъ Непера (стран. 20).

Помощію одного изъ сферическихъ треугольниковъ, напр. ABC, (см. политип. 1-й), рѣшаются слѣдующіе:

## Прямоугольные (къ § 3, стр. 21).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | △ABC | ∠A | ∠B | ∠C | ⌣a | ⌣b | ⌣c |
| | | 90° | 13°19′ | 87°16′ | 78°21′49″ | 13°2′17″ | 78°3′4″ |
| 2 | △BEK | ∠E | ∠B | ∠K=(90°—b) | KB=(90°—c) | EK=(90°—C) | EB=(90°—a) |
| | | 90° | 13°19′ | 76°57′43″ | 11°56′56″ | 2°44′ | 11°38′11″ |
| 3 | △KFJ | F | J = a | K=(90°—b) | KJ=∠C | FK=c | FJ=(90°—B) |
| | | 90° | 78°21′49″ | 76°57′43″ | 87° 16′ | 78°3′4″ | 76°41′ |
| 4 | △JGH | G | J = a | H=(90—c) | JH=∠B | JC=(90°—C) | GH=b |
| | | 90° | 78°21′49″ | 11°56′56″ | 13°19′ | 2°44′ | 13°2′17″ |
| 5 | △HDC | D | H=(90°—c) | C | CH=(90°—b) | DH=(90°—B) | CD=(90°—a) |
| | | 90° | 11°56′56″ | 87°16′ | 76°57′43″ | 76°41′ | 11°38′11″ |

## Четвертные (къ стран. 29).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | △JKH | ⌣KH | ⌣KJ=∠C | ⌣JH=∠B | ∠KJH=(180—a) | ∠JHK=c | ∠JKH=b |
| | | 90° | 87°16′ | 13°19′ | 101°38′11″ | 78°3′4″ | 13°2′17″ |
| 7 | △JHC | ⌣JC | JH=∠B | HC=(90°—b) | JHC=(90°+c) | HJC=(90°—a) | HCJ=(90°—C) |
| | | 90° | 13°19′ | 76°57′43″ | 168°3′4″ | 11°38′11″ | 2°44′ |
| 8 | △HCB | HB | CH=(90°—b) | CB=a | HCB=(180°—C) | CBH=(90°—B) | CHB=c |
| | | 90° | 76°57′43″ | 78°21′49″ | 92°44′ | 76°41″ | 78°3′4″ |
| 9 | △CBK | CK | CB=a | BK=(90°—c) | CBK=(180°—B) | BCK=(90°—C) | BKC=b |
| | | 90° | 78°21′49″ | 11°56′56″ | 166°41′ | 2°44′ | 13°2′17″ |
| 10 | △BKJ | BJ | BK=(90°—c) | KJ=C | BKJ=(90°+b) | KBJ=(90°—B) | KJB=(90°—a) |
| | | 90° | 11°56′56″ | 87°16′ | 103°2′17″ | 76°41′ | 11°38′11″ |

въ рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ вобще должно обращать вниманіе на слѣдующія условія:

1. Каждая изъ сторонъ, данная или искомая, должна заключаться между 0 и 180°.

2. Каждый изъ угловъ, какъ данный такъ и искомый, долженъ заключаться между 0 и 180°.

Слѣдовательно, какъ $\frac{1}{2}$ (a — b), такъ и $\frac{1}{2}$ (A — B) всегда <90°.

Кромѣ того:

*Косинусъ* стороны или угла долженъ находиться между 1 и —1.

*Синусъ*, — всегда положительный, и притомъ не болѣе 1.

*Тангенсъ*, всегда вещественный, можетъ имѣть произвольную величину, кромѣ нуля.

*Котангенсъ*, всегда вещественный, можетъ имѣть произвольную величину, но не долженъ быть равенъ ∞.

## § 3

## Численные примѣры для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

—

### ЗАДАЧА 1.

Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ даны два катета b и c, вычислить прочія части a, B и C.

*Рѣшеніе.*

1. Вычисленіе гипотенузы (a)

$$\text{Cos}\,a = \text{Sin}\,(90° - b).\text{Sin}\,(90° - c)$$

$$\text{Cos}\,a = \text{Cos}\,b.\ \text{Cos}\,c.$$

2. Вычисленіе угла B.

$$\text{Cos}\,(90° - c) = \text{Cotg}\,B.\ \text{Cotg}\,(90° - b)$$

$$\text{Sin}\,c = \text{Cotg}\,B.\ \text{Tang}\,b$$

$$\text{Cotg}\,B = \frac{\text{Sin}\,c}{\text{Tang}\,b}.$$

3. $$\text{Cos}\,(90° - b) = \text{Cotg}\,C.\ \text{Cotg}\,(90° - c)$$

$$\text{Sin}\,b = \text{Cotg}\,C.\ \text{Tang}\,c$$

$$\text{Cotg}\,C = \frac{\text{Sin}\,b}{\text{Tang}\,c}.$$

---

его на два прямоугольные. Недостатокъ двухъ послѣднихъ уравненій былъ причиною, что древніе не могли рѣшить нѣкоторыхъ вопросовъ; наприм. по тремъ угламъ опредѣлить остальныя части, и затруднялись при рѣшеніи треугольника по даннымъ тремъ сторонамъ.

Численный примѣръ. Пусть $b = 57^\circ\ 13'$, $c = 98^\circ\ 47'$.

1. Вычисленіе гипотенузы (a).

— + —

$\mathrm{Cos}\ a = \mathrm{Cos}\ b.\ \mathrm{Cos}\ c,$

слѣдоват. (a) во 2-ой четверти;

$\log \mathrm{Cos}\ 57^\circ\ 13' = 9{,}733569$

$\log \mathrm{Cos}\ 98^\circ\ 47' = 9{,}183834$

$\log \mathrm{Cos}\ a = 8{,}917403$

$a = (85^\circ\ 15'\ 26'')$

$= 94^\circ\ 44'\ 34''.$

2. Вычисленіе угла B.

+ +

$\mathrm{Cotg}\ B = \dfrac{\mathrm{Sin}\ c}{\mathrm{Tang}\ b}.$

+

слѣдоват. B въ 1-ой четверти;

$\log \mathrm{Sin}\ 98^\circ\ 47' = 9{,}994877$

$\log \mathrm{Tg}\ 57^\circ\ 13' = 9{,}808916$

$\log \mathrm{Cotg}\ B = 9{,}803793$

$B = 57^\circ\ 31'\ 24''.$

3. Уголъ C вычисляется также какъ и уголъ B. По этому находимъ $C = 97^\circ\ 24'\ 5''$.

Изслѣдованіе формулъ.

Для вычисленія угла B получили

$$\mathrm{Sin}\ c = \mathrm{Cotg}\ B.\ \mathrm{Tang}\ b;$$

$$+ \quad \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right. \qquad \left. \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$$

но синусъ есть всегда величина положительная, слѣдовательно Cotg B и Tang b необходимо должны быть съ одинакими знаками, а потому B и b всегда будутъ, или обѣ величины въ 1-ой четверти, или обѣ во второй, что мы и будемъ, для краткости, выражать словомъ *одинаки*.

Отсюда новое свойство прямоуг-ныхъ сфер. триуг-ковъ, состоящее въ томъ, что *каждый изъ косвенныхъ угловъ всегда одинакъ со стороною ему противолежащею* (см. § 1, теор. 7, приб. 1).

Тоже самое можно доказать, или чисто-геометрическимъ способомъ, помощію построенія, или черезъ ограниченіе нѣкоторыхъ формулъ сферическихъ прямоугольныхъ триугольниковъ, напр. $\mathrm{Cos}\ B = \mathrm{Sin}\ C.\ \mathrm{Sin}\ (90^\circ - b)$, $\mathrm{Cos}\ B = \mathrm{Sin}\ C.\ \mathrm{Cos}\ b$; здѣсь Sin C всегда со знакомъ +, слѣдовательно Cos B и Cos b необходимо съ одинакими знаками, т. е. B и b *одинаки*.

Примѣры для упражненія.

| Данныя. | | Искомыя. | | |
|---|---|---|---|---|
| b | c | a | B | C |
| 108° 7′ | 39° 3′ 5″ | 103° 58′ 26″ | 101° 38′ 49″ | 40° 29′ 1″ |
| 50° | 52° 55′ 26″ | 67° 12′ | 56° 11′ 56″ | 59° 56′ 10″ |

*Примѣч.* Такъ какъ всѣ величины въ этомъ вопросѣ опредѣляются помощію Cos. и Ctg. то, по ограниченіи, не можетъ быть сомнѣнія въ выборѣ искомыхъ величинъ, и треугольникъ будетъ всегда возможенъ и всегда одинъ.

### ЗАДАЧА 2.

Въ прямоугольномъ триуг-кѣ ABC даны гипотенуза (a) и катетъ b; найти прочія части триугольника, т. е. углы B и C, а также катетъ c.

*Рѣшеніе.* Искомыя найдутся по слѣдующимъ формуламъ:

1. Опредѣленіе стороны c.

$\text{Cos } a = \text{Sin } (90^\circ - b) . \text{Sin } (90^\circ - c),$

$\text{Cos } a = \text{Cos } b . \text{Cos } c,$

откуда $\text{Cos } c = \dfrac{\text{Cos } a}{\text{Cos } b}$.

2. Опредѣленіе угла B.

$\text{Cos } (90^\circ - b) = \text{Sin } a \text{ Sin } B,$

$\text{Sin } b = \text{Sin } a . \text{Sin } B,$

откуда $\text{Sin } B = \dfrac{\text{Sin } b}{\text{Sin } a}$.

3. Опредѣленіе угла C.

$\text{Cos } C = \text{Cotg } a . \text{Cotg } (90^\circ - b),$

или $\text{Cos } C = \text{Cotg } a . \text{Tang } b.$

Численный примѣръ. Пусть $a = 107^\circ 17'$, $b = 143^\circ 12' 3''$; вычислить c, B, C.

1. *Вычисленіе стороны c.*

$$\overset{+}{\text{Cos } c} = \dfrac{\overset{-}{\text{Cos } a}}{\underset{-}{\text{Cos } b}}$$

$\log \text{Cos } a = 9{,}472899$

$\text{lo}'\text{g Cos } b = 0{,}096508$

$\log \text{Cos } c = 9{,}569407$

$c = 68^\circ 13' 15{,}4''$

2 Вычисленіе угла B.

$$\text{Sin } B = \dfrac{\text{Sin } b}{\text{Sin } a}$$

$\log \text{Sin } B = 9{,}777436$

$\text{lo}'\text{g Sin } a = 0{,}020066$

$\log \text{Sin } B = 9{,}797502$

$B = (38^\circ 51' 14'') = 141^\circ 8' 46''$, одинако съ b.

3. Вычисленіе угла C.

$$\overset{+}{\text{Cos } C} = \overset{-}{\text{Cotg } a} . \overset{-}{\text{Tang } b}$$

$\log \text{Tang } b = 9{,} 873944$

$\log \text{Cotg } a = 9{,} 492964$

$\log \text{Cos } C = 9{,} 366908$

$C = 76^\circ 32' 25''.$

*Изслѣдованіе формулъ.* Изъ уравненія (1) $\text{Cos } c = \dfrac{\text{Cos } a}{\text{Cos } b}$ находимъ, что задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, если $\text{Cos } a = 0$ и $\text{Cos } b = 0$,

Изслѣдованія формулы $\mathrm{Sin}\ B = \frac{\mathrm{Sin}\ b}{\mathrm{Sin}\ a}$ изложены въ § 2, теор. 2; откуда и видны случаи возможности и невозможности заданія.

Изъ формулы $\mathrm{Cos}\ C = \mathrm{Cotg}\ a.\ \mathrm{Tang}\ b$ помощію ея ограниченія находимъ,

| Cos C | Cotg a | Tang b |
|---|---|---|
| + | + | + |
| + | − | − |
| − | + | − |
| − | − | + |

т. е. что *если гипотенуза и сторона одинаки, то уголъ между ними острый, если же неодинаки, то уголъ между ними тупой, и обратно.*

Примѣры для упражненія.

| Данныя. | | Искомыя. | | |
|---|---|---|---|---|
| a | c | B | C | b. |
| 115° 56′ 50″ | 124° 52′ 25″ | 45° 43′ 2″ | 114° 9′ 46″ | 40° 4′ 16″ |
| 83° 1′ 4″ | 65° 22′ 56″ | 74° 30′ | 66° 20′ | 73° 2′ 12″ |

ЗАДАЧА 3.

Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ даны катетъ b и прилежащій ему уголъ C, вычислить прочія части a, c, B.

*Рѣшеніе.*

1. Вычислен. гипотенузы a.

$\mathrm{Cos}\ C = \mathrm{Ctg}\ a.\ \mathrm{Ctg}\ (90° - b)$,

$\mathrm{Cos}\ C = \mathrm{Cotg}\ a\ \mathrm{Tang}\ b$,

откуда $\mathrm{Cotg}\ a = \frac{\mathrm{Cos}\ C}{\mathrm{Tang}\ b}$.

2. Вычисленіе катета c.

$\mathrm{Cos}\ (90° - b) = \mathrm{Ctg}\ (90° - c)\ \mathrm{Ctg}\ C$

$\mathrm{Sin}\ b = \mathrm{Tang}\ c.\ \mathrm{Cotg}\ C$

$\mathrm{Tang}\ c = \frac{\mathrm{Sin}\ b}{\mathrm{Cotg}\ C}$.

3. Вычисленіе угла B.

$$\mathrm{Cos}\ B = \mathrm{Sin}\ C.\ \mathrm{Sin}\ (90° - b) = \mathrm{Sin}\ C.\ \mathrm{Cos}\ b.$$

*Численный примѣръ.* Дано $b = 28°\ 7'\ 10''$, $C = 8°\ 19'\ 25''$; вычислить прочія части.

Такъ какъ $b < 90°$ и $C < 90°$, то каждая изъ прочихъ частей находится въ первой четверти.

По выведеннымъ формуламъ получимъ:

$a = 28°\ 22'\ 20''$, $c = 3°\ 56'\ 41''$

$B = 82°\ 39'\ 53''$.

*По изслѣдованію формулъ* находимъ, что при этомъ заданіи треугольникъ всегда возможенъ, если искомыя b и C находятся каждая между 0 и 180°.

Примѣръ для упражн. Даны: $\mathfrak{b} = 50°$, $C = 59° 56' 10''$.
Искомыя: $a = 67° 12'$, $c = 52° 55' 26''$, $B = 56° 11' 56''$.

### ЗАДАЧА 4.

Въ прямоугольномъ сферическ. треугольникѣ дана гипотенуза $a = 115° 17' 20''$ и уг. $B = 98° 28' 30''$; вычислить прочія части $\mathfrak{b}$, $c$, $B$.

*Рѣшеніе.* Вычисленіе производится по слѣдующимъ формуламъ:

1. Для стороны $\mathfrak{b}$.

$$\text{Sin } \mathfrak{b} = \text{Sin } B.\ \text{Sin } a$$

$$\mathfrak{b} = 116° 34' 57''$$

одинака съ $\angle$ B.

2. Для угла C.

$$\text{Cos } a = \text{Cotg } B.\ \text{Cotg } C$$

$$\text{Cotg } C = \frac{\text{Cos } a}{\text{Cotg } B}$$

$+$

$$C = 19° 13' 50''.$$

3. Для вычисленія стороны c.

$$\text{Cos } B = \text{Tang } c.\ \text{Cotg } a$$

$-$

$$\text{Tang } c = \frac{\text{Cos } B}{\text{Cotg } a};\ c = 17° 19' 29''.$$

$+\quad -$

*Изслѣдованіе уравненій.* Если въ выведенныхъ нами уравненіяхъ положимъ $a = 90°$, $B = 90°$, то, по вычисленію, $\mathfrak{b}$ будетъ равна $90°$; для обѣихъ же послѣднихъ величинъ C и c получимъ $\frac{0}{0}$; т. е. C и c будутъ неопредѣленными, могутъ имѣть всѣ возможныя величины, но должны быть равны между собою, потому что точка C будетъ полюсомъ дуги c.

Примѣры для упражненій.

| Данныя. | | Искомыя. | | |
|---|---|---|---|---|
| a | B | $\mathfrak{b}$ | c | C |
| 120° 38′ 43″ | 44° 54′ 44″ | 37° 24′ 11″ | 129° 54′ 56″ | 116° 56′ 17″ |
| 161° 13′5,″3 | 36° 12′ 10″ | 10° 57′ 45″,2 | 164°39′53,7″ | 124°43′17,4″ |

### ЗАДАЧА 5.

Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ даны катетъ $c = 57° 54'$, и противолежащій ему уголъ $C = 77° 48'$, сыскать прочія части.

*Рѣшеніе.*

1. Отысканіе катета $b$.

$$\text{Cos}(90^\circ - b) = \text{Cotg } C . \text{Cotg}(90 - c)$$

$$\text{Sin } b = \text{Cotg } C . \text{ Tang } c$$

$$\log \text{Cotg } C = 9,334871$$

$$\log \text{Tang } c = 10,202526$$

$$\log \text{Sin } b = 9,537397$$

$$b_1 = 20^\circ 9' 41''$$

$$b_2 = 159^\circ 50' 19''.$$

2. Отысканіе гипотенузы $a$.

$$\text{Cos } (90^\circ - c) = \text{Sin } a . \text{ Sin } C$$

$$\text{Sin } c = \text{Sin } a . \text{ Sin } C$$

$$\text{Sin } a = \frac{\text{Sin } c}{\text{Sin } C}$$

$$\log \text{Sin } c = 9,927946$$

$$(-) \log \text{Sin } C = 9,990079$$

$$\log \text{Sin } a = 9,937867$$

$$a_1 = 60^\circ 4' 36''$$

$$a_2 = 119^\circ 55' 24''.$$

3. Вычисленіе угла B.

$$\text{Cos } C = \text{Sin } B . \text{ Sin } (90^\circ - c)$$

$$\text{Cos } C = \text{Sin } B . \text{ Cos } c, \text{ слѣд } \text{Sin } B = \frac{\text{Cos } C}{\text{Cos } c},$$

$$\log \text{Cos } C = 9,324950$$

$$\log \text{Cos } c = 9,725420$$

$$\log \text{Sin } B = 9,599530$$

Сторона $a$ и уголъ B вычисляемы были безъ ариѳмет. дополненій.

$B_1 = 23^\circ 25' 58''$, $B_2 = 156^\circ 34' 2''$.

Такъ какъ всѣ искомыя величины $b$, $a$, B этой задачи опредѣляются по ихъ синусамъ, то для каждой изъ нихъ получатся по два значенія. Двойственность этого рѣшенія очевидна изъ чертежа (11), въ которомъ $\angle$ A $= 90^\circ$, C $=$ данному углу, $\smile$ AB $= c$; треугольники CAB и C′AB равно удовлетворяютъ требованію. Если же для какой нибудь искомой величины, напр. для угла B, выбранно какое либо значеніе, напр. положили, что $B_1 < 90^\circ$, то и всѣ остальныя величины, выведенныя изъ уравненій, должны согласоваться съ этимъ рѣшеніемъ; по этому и сторона $b_1$ берется уже не произвольно, но должна быть одинакова съ $B_1$ (§ 3, зад. 1).

Сторона $a_1$ также должна удовлетворять принятому знакоположенію по формулѣ $\text{Cos } a = \text{Cos } b . \text{ Cos } c$ (§ 2, теор. 1).

Расположивъ отысканныя величины по треугольникамъ, получимъ:

| Для треугольника ABC | для треугольника ABC′ |
|---|---|
| $C = 77^\circ 48'$, $c = 57^\circ 54'$ | $C = 77^\circ 48'$, $c = 57^\circ 54'$ |
| $b_1 = 20^\circ 9' 41''$ | $b_2 = 159^\circ 50' 19''$ |
| $a_1 = 60^\circ 4' 36''$ | $a_2 = 119^\circ 55' 24''$ |
| $B_1 = 23^\circ 25' 58''$; | $B_2 = 156^\circ 34' 2''$. |

*Изслѣдованіе*. Формула (2), $\text{Sin a} = \frac{\text{Sin c}}{\text{Sin C}}$, даетъ тѣже случаи возможности и невозможности заданія, какія мы получили при изслѣдованіи уравненія $\text{Sin a} = \frac{\text{Sin b}}{\text{Sin B}}$ (§ 2, теор. 2.)

Если же по заданію $c = 90°$, то и $C = 90°$, слѣд. изъ уравненія (2) получимъ

$\text{Sin c} = 1$, $\text{Sin C} = 1$, а потому $\text{Sin a} = 1$.

Изъ ур. 1-го $\text{Sin b} = \text{Cotg C. Tang c} = \frac{\text{Tang c}}{\text{Tang C}} = \frac{\infty}{\infty}$;

изъ ур. 3-го $\text{Sin B} = \frac{\text{Sin C}}{\text{Sin c}} = \frac{0}{0}$;

т. е. $a = 90^o$, а b и B неопредѣленны, съ тѣмъ однакожъ условіемъ, что $b = B$; слѣдовательно треугольниковъ, удовлетворяющихъ заданію, можетъ быть безчисленное множество.

Примѣры для упражненія.

1. Даны: $b = 56°37'40''$; $B = 84°29'50''$.

*Рѣш.* 1-й △) $a = 57°.'58''$; $A = 90°$; 2-й △) $a = 122°58'2''$; $A = 90°$;
$b = 56°37'40''$; $B = 84°\ 29'\ 50''$; $b = 56°37'40''$; $B = 84°29'50''$;
$c = 8°24'36''$; $C = 10°\ 2'\ 22''$. $c = 171°35'24''$; $C = 169°57'38''$.

2. Даны: $b = 35°\ 3'$; $B = 49°\ 7'$.

1-й △) $a = 49°\ 25'\ 44''$; 2-й △) $a = 130°\ 34'\ 16''$;
$c = 37°\ 23'\ 43''$; $c = 142°\ 36'\ 17''$;
$C = 53°\ \ 5'\ \ 0'',4$. $C = 126°\ 54'\ 59'',6$.

### ЗАДАЧА 6.

По даннымъ двумъ угламъ $B = 70°\ 5'\ 2''$ и $C = 140°\ 10'\ 4''$ при гипотенузѣ, вычислить триуг-никъ.

***Рѣшеніе.***

1. Вычисленіе гипотенузы a.

$\text{Cos a} = \text{Cotg B. Cotg C}$,
$\quad -\quad\quad +\quad\quad -$

$a = 115°\ 44'\ 41,6''$.

2. Вычисленіе стороны b.

$$\underset{+}{\text{Cos b}} = \frac{\overset{+}{\text{Cos B}}}{\underset{+}{\text{Sin C}}},$$

$b = 57°\ 52'\ 20,7''$.

3. Вычисленіе стороны c.

$$\underset{-}{\overset{-}{\text{Cos c}}} = \frac{\text{Cos C}}{\underset{+}{\text{Cos B}}},\ C = 144°\ 45'\ 46,9''.$$

*Изслѣдованіе.* Такъ какъ каждая изъ вычисленныхъ величинъ въ этомъ случаѣ опредѣлятся по косинусу, который не можетъ быть равенъ $\frac{0}{0}$, а также не можетъ имѣть двухъ значеній, то задача имѣетъ всегда только одно рѣшеніе.

Величина гипотенузы (а) опредѣляется помощію ограниченія формулы

| Cos a = Cotg B. Cotg C. | | | Cos a = Cotg B. Cotg C. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | $\pm$ | $\pm$ | — | $\pm$ | — |
| | — | — | | — | + |

Для возможности заданія необходимо, чтобы сумма угловъ B + C была > 90°, но < 270°.

*Примѣч.* Чтобы косинусы искомыхъ величинъ были менѣе 1, необходимы слѣдующія условія:

Если B < 90° и C < 90°, то B + C должны быть > 90°,
если B > 90° и C > 90°, то B + C . . . » . . . < 3 × 90°,
если B > 90° а C < 90°, то B — C . . . » . . . < 90°,
если B < 90° а C > 90°, то C — B . . . » . . . < 90°.

Примѣры для упражненій.

| Данныя. | | Искомыя. | | |
|---|---|---|---|---|
| B | C | a | b | c |
| 74° 30′ | 66° 20′ | 83° 1′ 4″ | 73° 2′ 12″ | 65° 22′ 56″ |
| 13° 19′ | 87° 16′ | 78° 21′ 49″ | 13° 2′ 17″ | 78° 3′ 4″ |

**Общее примѣчаніе.**

Вычислить слѣдующіе треугольники, и, ссылаясь на предыдущія правила, указать въ которыхъ изъ нихъ заданіе предложено не вѣрно. A = 90°.

| | | |
|---|---|---|
| 1. B = 118° 37′ 29″<br>b = 78° 35′ 43″ | 2. B = 18° 37′ 29″<br>b = 78° 35′ 43″ | 3. B = 173° 59′ 25″<br>b = 165° 40′ 10″ |
| 4. B = 47° 38′ 29″<br>C = 26° 19′ 37″ | 5. b = 58° 39′ 17″<br>a = 49° 27′ 56″ | 6. b = 158° 39′ 17″<br>a = 149° 27′ 56″ |
| 7. B = 147° 38′ 29″<br>C = 126° 19′ 37″ | 8. B = 172° 54′ 20″<br>C = 35° 45′ 30″ | 9. B = 22° 37′ 35″<br>C = 137° 28′ 19″. |

**Рѣшеніе четвертныхъ, равнобедренныхъ и равноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, а также формулы для рѣшенія нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ сф. прямоугольныхъ треугольниковъ.**

1. Сферическій треугольникъ называется *четвертнымъ* если въ числѣ данныхъ есть сторона въ 90°. Черезъ отысканіе другаго треугольника, полярнаго данному четвертному, рѣшеніе такихъ треугольниковъ можетъ быть приведено къ рѣшенію треугольниковъ *прямоугольныхъ*.

**Задача.** Въ четвертномъ сферическомъ треугольникѣ сторона BC = a = 90° (черт. 12), ∠ A = 125°, ∠ C = 48°. Отыскать прочія части.

*Рѣшеніе.* Данному треугольнику начертивъ полярный A′B′C′, получимъ, что послѣдній есть прямоугольный при вершинѣ A′, потому что

$A' + a = 180°$, слѣдовательно $A' = 180° - a = 90°$
$A + a' = 180°$, » » $a' = 180° - A = 55°$
$C + c' = 180°$, » « $c' = 180° - C = 132°$.

По извѣстнымъ правиламъ, рѣшая прямоугольный сферическій треугольникъ A′B′C′, получимъ

$B' = 141°\ 2'\ 49''$, $C' = 114°\ 52'\ 38''$, $b' = 149°\ 0'\ 11''$, а отсюда $b = 180° - B' = 38°\ 57'\ 11''$, $c = 180° - C' = 65°\ 7'\ 22''$, $B = 180° - b' = 30°59'\ 49''$.

Примѣры для упражненія (политип. 1-й).
(См. таблиц. треугольниковъ къ правиламъ Непера).

| △ | ⌣HK | ⌣ KJ | ⌣ JH | ∠ KJH | ∠ THK | ∠ JKH |
|---|---|---|---|---|---|---|
| JKH | 90° | 87° 16′ | 13° 19′ | 101° 38′ 11″ | 78° 3′ 4″ | 13°2′17″ |

*Примѣч.* Если въ сферическомъ треугольникѣ есть двѣ стороны, каждая по 90°, то и противолежащіе имъ углы равны каждый 90°; третій же уголъ равенъ третьей сторонѣ. — Если каждая изъ трехъ сторонъ=90°, то и каждый изъ угловъ=90°.

2. Если данный треугольникъ ABC (черт. 13) есть *равнобедренный*, въ которомъ b = c, то и B = C; а потому, изъ вершины третьяго угла A на противолежащую сторону опустивъ перпендикуляръ AD, получимъ, что данный треугольникъ разсѣчется на два прямоугольные BAD и CAD. Вычисляя части одного изъ нихъ, получимъ рѣшенія и для другаго прямоугольнаго, а слѣдовательно и для даннаго.

Формулы, служащія для вычисленія равнобедренныхъ треугольниковъ, суть слѣдующія:

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2} A . \sin c, \quad \cos c = \operatorname{Cotg} B . \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} A,$$
$$\operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} a = \cos B . \operatorname{Tang} c, \quad \cos \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2} a . \sin B.$$

**Задача.** Въ равнобедренномъ сфер. треугольникѣ ABC даны AB = AC = 46° 30′ и уголъ B = 74° 30′. Вычислить прочія части.

*Рѣшеніе.* Проведя AD къ серединѣ стороны BC, получимъ

прямоугольные треугольники ABD = ACD. По извѣстнымъ правиламъ вычисляя первый изъ нихъ, находимъ

| | |
|---|---|
| $BD = \frac{a}{2} = 15^\circ\ 43'\ 40''$, | $\angle\ BAD = \frac{1}{2}\ A = 21^\circ\ 56'\ 37''$, |
| слѣд. 1) $BC = 31^\circ\ 27'\ 20''$. | слѣд. 2) $\angle\ BAC = A = 43^\circ\ 53'\ 14''$. |

Прим. для упражненія.

| Данныя. | Искомыя. | |
|---|---|---|
| $AB = AC = 28^\circ 22' 21''$ | $\frac{1}{2}A = 82^\circ 39' 53''$, | $BAC = A = 165^\circ 19' 46''$. |
| $B = C = 8^\circ 19' 25''$. | $BD = DC = 28^\circ 7' 10''$, | $BC = a = 56^\circ 14' 20''$. |

*Примѣч.* Если въ данномъ треугольникѣ всѣ три стороны между собою равны, то и всѣ углы также взаимно равны.

**Задача.** Въ равностороннемъ сфер. треугольникѣ каждая изъ сторонъ равна $60^\circ$. Чему равенъ каждый изъ угловъ.

*Рѣш.* Вычисляя какъ въ предыдущей задачѣ, получимъ $A = B = C = 70^\circ\ 31'\ 43{,}5''$.

3. Если въ сфер. треугольникѣ два угла взаимно равны, то такой треугольникъ можетъ также быть вычисленъ помощію прямоугольныхъ, которые получатся, если вершину третьяго угла соединимъ съ срединою стороны ему противолежащей, или если третій уголъ раздѣлимъ пополамъ. Полученные два прямоугольные треугольника ADB, ADC будутъ взаимно равны.

*Численный примѣръ.* Если $B = C = 70^\circ 5' 20''$ и $A = 80^\circ 37' 48''$, то прочія части, по вычисленію, будутъ $BC = 71^\circ\ 37'$; $AB = AC = 58^\circ\ 14'\ 20''$.

**Задача.** Въ сфер. треугольникѣ ABC каждый изъ трехъ угловъ равенъ $115^\circ$. Чему равны стороны?

*Рѣш.* Изъ $\triangle$ ABD (черт. 6, № 1) находимъ

$$\widehat{\text{Cos AB}} = \text{Cotg } 115^\circ.\ \text{Cotg } 57^\circ\ 30'$$
$$-\qquad\qquad -\qquad\qquad +$$

| | |
|---|---|
| lg. Cotg $115^\circ$ = 9,668672 | откуда |
| lg. Cotg.$57^\circ 30'$ = 9,804187 | $a = b = c = 107^\circ\ 16'\ 54''$ |
| lg. Cos(AB=c) = 9,472859 | |

4. Хотя формулы выведенныя нами изъ мнемоническихъ правилъ Непера и могутъ быть примѣнены къ рѣшенію всѣхъ случаевъ прямоугольныхъ сфер. треугольниковъ, однако необходимо замѣтить, что если искомая величина весьма мала, и выражена въ косинусахъ, или близка къ $90^\circ$, и выражена въ синусахъ, то, какъ извѣстно (прям. тр. приб. къ §. 12), (*) при этихъ

(*) См. Начальн. основ. прямолин. триг., составл. А. Дмитріевымъ. Спб. 1862.

случаяхъ, вычисленіе по формуламъ не дастъ точныхъ угловъ. Для избѣжанія неточности стараются искомыя величины выразить въ тангенсахъ половинъ искомыхъ величинъ.

1). По даннымъ угламъ B и C найти a.

$\mathrm{Cos}\ a = \mathrm{Cotg}\ B.\ \mathrm{Cotg}\ C.$

Но (по §7 пр. тр. ф. 18) $\mathrm{Tang}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - \mathrm{Cos}\ a}{1 + \mathrm{Cos}\ a} = \frac{1 - \mathrm{Cotg}\ B.\ \mathrm{Cotg}\ C}{1 + \mathrm{Cotg}\ B.\ \mathrm{Cotg}\ C}$,

или $\mathrm{Tang}^2 \frac{1}{2} a = \frac{\mathrm{Sin}\ B.\ \mathrm{Sin}\ C - \mathrm{Cos}\ B.\ \mathrm{Cos}\ C}{\mathrm{Sin}\ B\ \ \mathrm{Sin}\ C + \mathrm{Cos}\ B.\ \mathrm{Cos}\ C} = -\frac{\mathrm{Cos}\ (B + C)}{\mathrm{Cos}\ (B - C)}$.

Здѣсь полезно замѣтить что 2-ая часть уравненія, для уничтоженія мнимаго результата, должна быть положительною, а потому знакъ минусъ передъ дробью долженъ уничтожиться; для этого числитель $\mathrm{Cos}\ (B+C)$ данной дроби долженъ сдѣлаться величиною отрицательною, что можетъ получиться при условіи: $B + C > 90°$. Слѣдоват. въ прямоугольномъ сф. треугольникѣ сумма угловъ, кромѣ прямаго, всегда $> 90°$.

2) По угламъ B и C найти сторону b.

Положивъ $B = 90° - z$, изъ формулы $\mathrm{Cos}\ b = \frac{\mathrm{Cos}\ B}{\mathrm{Sin}\ C}$

получимъ $\mathrm{Cos}\ b = \frac{\mathrm{Sin}\ z}{\mathrm{Sin}\ C}$; но $\mathrm{Tang}^2 \frac{1}{2} b = \frac{1 - \mathrm{Cos}\ b}{1 + \mathrm{Cos}\ b}$ или

$\mathrm{Tang}^2 \frac{1}{2} b = \frac{\mathrm{Sin}\ C - \mathrm{Sin}\ z}{\mathrm{Sin}\ C + \mathrm{Sin}\ z} = \frac{\mathrm{Tg} \frac{1}{2} (C - z)}{\mathrm{Tg} \frac{1}{2} (C + z)} = \mathrm{Tg} \frac{1}{2} (C - z).\mathrm{Cotg} \frac{1}{2} (C + z)$ (*).

Откуда $\mathrm{Tg} \frac{1}{2} b = \sqrt{\mathrm{Tg} \left(45° + \frac{B - C}{2}\right) \mathrm{Tg} \left(\frac{B + C}{2} - 45°\right)}$.

3) По сторонамъ a и c найти уголъ B.

$\mathrm{Cos}\ B = \mathrm{Cotg}\ a.\ \mathrm{Tg}\ c$; но $\mathrm{Tg}^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \mathrm{Cos}\ B}{1 + \mathrm{Cos}\ B}$, слѣд.

$\mathrm{Tang}^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \mathrm{Tg}\ c.\ \mathrm{Cotg}\ a}{1 + \mathrm{Tg}\ c.\ \mathrm{Cotg}\ a}$ или $\mathrm{Tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\ (a - c)}{\mathrm{Sin}\ (a + c)}}$.

Замѣтимъ здѣсь, что когда $a + c > 180°$, то для избѣжанія мнимаго радикала, необходимо, что бы было $a < c$. И такъ, когда въ прямоугольномъ сфер. треугольникѣ гипотенуза вмѣстѣ съ катетомъ $> 180°$, то гипотенуза меньше катета.

4) По a и b найти c.

$\mathrm{Cos}\ c = \frac{\mathrm{Cos}\ a}{\mathrm{Cos}\ b}$; но $\mathrm{Tg}^2 \frac{1}{2} c = \frac{1 - \mathrm{Cos}\ c}{1 + \mathrm{Cos}\ c}$, то

$\mathrm{Tg}^2 \frac{1}{2} c = \frac{\mathrm{Cos}\ b - \mathrm{Cos}\ a}{\mathrm{Cos}\ b + \mathrm{Cos}\ a} = \frac{-2\ \mathrm{Sin} \frac{1}{2} (b + a).\ \mathrm{Sin} \frac{1}{2} (b - a)}{2\ \mathrm{Cos} \frac{1}{2} (b + a).\ \mathrm{Cos} \frac{1}{2} (b - a)}$

слѣд. $\mathrm{Tg}^2 \frac{1}{2} c = \mathrm{Tg} \frac{1}{2} (a + b)\ \mathrm{Tg} \frac{1}{2} (a - b)$.

---

(*) $\mathrm{Tg} \frac{1}{2} (C - z) = \mathrm{Tg} \frac{1}{2} (C - (90° - B)) = \mathrm{Tg} \frac{1}{2} (C + B - 90°)$ или

$\mathrm{Tg} \frac{1}{2} (C - z) = \mathrm{Tg} \left(\frac{B + C}{2} - 45°\right)$.

Также $\mathrm{Cotg} \frac{1}{2} (C + z) = \mathrm{Cotg} \frac{1}{2} (C + 90° - B) = \mathrm{Cotg} \frac{1}{2} ((C - B) + 90°)$,

или $\mathrm{Cotg} \frac{1}{2} (C + z) = \mathrm{Cotg} \frac{1}{2} (90° - (B - C)) = \mathrm{Cotg} \left(45° - \frac{B - C}{2}\right)$,

слѣд. $\mathrm{Cotg} \frac{1}{2} (C + z) = \mathrm{Tang} \left(45° + \frac{B - C}{2}\right)$.

5) По a и B найти $b$.

$$\sin b = \sin a \sin B.$$

Пусть $b = 90^\circ - 2z$ и $\operatorname{Tg} x = \sin a \sin B$ слѣд., вмѣсто уравнен. $\sin b = \sin a \sin B$, получимъ $\cos 2z = \operatorname{Tg} x$; но

$$\operatorname{Tg}^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{1 + \cos 2z} = \frac{1 - \operatorname{Tg} x}{1 + \operatorname{Tg} x} = \operatorname{Tg}(45^\circ - x).$$

Замѣняя z величиною $45^\circ - \frac{b}{2}$, получимъ $\operatorname{Tg}\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right) = \sqrt{\operatorname{Tg}(45^\circ - x)}$.

По этой формулѣ опредѣлится $b$; но прежде надо отыскать x, по уравненію $\operatorname{Tang} x = \sin a . \sin B$.

## ГЛАВА III.

## § 4.

### Выводъ главнѣйшихъ общихъ формулъ для рѣшенія косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

**Число возможныхъ случаевъ.** Для рѣшенія всѣхъ случаевъ косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ достаточно имѣть столько отношеній между каждыми четырьмя величинами изъ шести, сколько можно сдѣлать различныхъ перестановленій изъ шести по четыре. Но число такихъ перестановленій, какъ извѣстно, равно $\frac{6.\ 5}{1.\ 2} = 15.$

Эти пятнадцать перестановленій могутъ быть приведены къ слѣдующимъ *четыремъ* различнымъ случаямъ:

1) Между a, $b$, c, A, а также { a, $b$, c, B; a, $b$, c, C.

2) Между a, $b$, A, B, . . . . { a, c, A, C; $b$, c, B, C.

3) Между a, $b$, A, C . . . . . { a, $b$, B, C; a, c, A, B; a, c, B, C; $b$, c, A, B; $b$, c, A, C.

4) Меж[illegible], A, B, C . . . . { $b$, A, B, C; c, A, B, C (*).

Главнѣйшія формулы, показывающія эти отношенія, суть слѣдующія:

---

(*) Отсюда видно что различныхъ положеній между четырьмя частями сферическаго треугольника можетъ быть не болѣе трехъ:

**ТЕОРЕМА 1.**

*Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ синусы сторонъ пропорціональны синусамъ угловъ имъ противолежащихъ*, т. е.
Sin a: Sin b: Sin c = Sin A: Sin B: Sin C.

*Доказательство.* Съ центромъ S шаровой поверхности соединивъ вершины A, B, C даннаго сферическаго треугольника (черт. 14), получимъ при центрѣ шара трегранный уголъ S A B C. Изъ вершины C одного изъ угловъ даннаго сферическаго треугольника ABC, на противолежащую грань опустивъ перпендикуляръ CF, а также проведя къ ребрамъ трегранпаго угла перпендикуляры CD и CE и соединивъ основаніе F перпендикуляра съ точками D и E, получимъ, что плоскій уголъ CDF = сф. ∠ A; плоск, уг. CEF = сф. ∠ B.

Но въ прямоугольныхъ треугольникахъ CFD и CFE

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin CDF} = \text{Sin A} = \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{CF}{\text{Sin b}} \\ \text{Sin CEF} = \text{Sin B} = \dfrac{CF}{CE} = \dfrac{CF}{\text{Sin a}} \end{array}\right\}$$ раздѣливъ первое изъ этихъ уравненій на второе, получимъ

$$\frac{\text{Sin A}}{\text{Sin B}} = \frac{CF}{\text{Sin b}} : \frac{CF}{\text{Sin a}} = \frac{\text{Sin a}}{\text{Sin b}};$$

откуда Sin a : Sin b = Sin A : Sin B, также
докажемъ, что Sin b : Sin c = Sin B : Sin C,
слѣдовательно Sin a : Sin b : Sin c = Sin A : SinB : Sin C...(I).

*Примѣч.* 1. Основываясь на этой теоремѣ, можно по даннымъ двумъ сторонамъ сферическаго треугольника и углу, противолежащему одной изъ нихъ, отыскать уголъ противолежащій другой данной сторонѣ, а также по двумъ даннымъ угламъ и сторонѣ, противолежащей одному изъ нихъ, отыскать сторону противолежащую другому данному углу. Доказанная нами теорема называется *теоремою синусовъ*.

Примѣч. 2. Ту же самую пропорцію Sin A : Sin B=Sin a: Sin b можно вывести изъ доказанныхъ уже формулъ для прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ (§ 2, теор. 2) : если изъ вершины угла C, не входящаго въ пропорцію, проведемъ дугу большаго круга перпендикулярно къ противолежащей сторонѣ AB (черт. 15). Изъ прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ ADC, BDC

$$\text{Sin A} = \frac{\text{Sin CD}}{\text{Sin b}}, \quad \text{Sin B} = \frac{\text{Sin CD}}{\text{Sin a}};$$ раздѣливъ равныя на равныя,

получимъ Sin A : Sin B = Sin a : Sin b.

1) По двѣ части рядомъ: a, b; A, B изъ (2)
2) Три рядомъ, а одна отдѣльно: b, c, A; a, или B, C, a; A изъ (1) и (4).
3) Всѣ четыре рядомъ a, C, b, A, изъ (3)

Обратно, теор. 2, §. 2 можетъ быть выведена какъ слѣдствіе изъ независимаго доказательства этой основной теоремы, и дѣйствительно въ пропорціи $\text{Sin } A : \text{Sin } B = \text{Sin } a : \text{Sin } b$, положивъ $\angle A = 90°$, получимъ

$1 : \text{Sin } B = \text{Sin } a : \text{Sin } b$, откуда $\text{Sin } B = \dfrac{\text{Sin } b}{\text{Sin } a}$.

*Примѣч.* 3 Хотя *теорема синусовъ*, по чертежу, была доказана для сторонъ и угловъ меньшихъ 90°, но нетрудно доказать ея справедливость и для всѣхъ другихъ случаевъ: пусть $b > 90°$ и $a > 90°$ (черт. 16). Дополнивъ данный треугольникъ до сферическаго двусторонника $CAC'BC$, получимъ $b + b' = 180°$, $a + a' = 180°$, $A + A' = 180°$, $B + B' = 180$; слѣд. $b'$ и $a'$ менѣе 90°, но въ треугольникѣ $A'B'C'$ $\text{Sin } A' : \text{Sin } B' = \text{Sin } a' : \text{Sin } b'$, подставивъ, получимъ $\text{Sin } (180° - A) : \text{Sin } (180° - B) = \text{Sin } (180° - a) : \text{Sin } (180° - b)$, откуда $\text{Sin } A : \text{Sin } B = \text{Sin } a : \text{Sin } b$.

## ТЕОРЕМА 2.

*Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC косинусъ одной изъ сторонъ равенъ произведенію косинусовъ двухъ прочихъ сторонъ вмѣстѣ съ произведеніемъ синусовъ этихъ сторонъ на косинусъ угла, содержимаго между ними,* (*или противолежащаго первой сторонѣ*), т. е.

$\text{Cos } a = \text{Cos } b.\ \text{Cos } c + \text{Sin } b.\ \text{Sin } c.\ \text{Cos } A.$

*Доказательство.* Сдѣлавъ такое же построеніе какъ и въ предыдущей теоремѣ (черт. 14), и изъ точки D на ребро SB опустивъ перпендикуляръ DG, получимъ

$$\text{Cos } a = SG + GE\ ; \quad \ldots . (\alpha)$$

но, въ $\triangle SGD$, прямая $SG = SD.\ \text{Cos } ASG = \text{Cos } b.\ \text{Cos } c$.

Проведя $FH \# GE$, или $FH \perp GD$, получимъ, что $\angle FDH = \angle ASB = c$ (ибо стороны одного угла перпендикулярны къ сторонамъ другаго), слѣд.

$$GE = FH = FD.\ \text{Sin } FDH = FD.\ \text{Sin } c;$$

но $FD = CD.\ \text{Cos } CDF = \text{Sin } b.\ \text{Cos } A$,

или $GE = \text{Sin } b.\ \text{Sin } c.\ \text{Cos } A$;

подставивъ найденныя выраженія въ формулу ($\alpha$),

найдемъ $\text{Cos } a = \text{Cos } b.\ \text{Cos } c + \text{Sin } b.\ \text{Sin } c.\ \text{Cos } A \ \ldots . (\text{II})$;

такимъ же образомъ получимъ:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos } b = \text{Cos } a.\ \text{Cos } c + \text{Sin } a.\ \text{Sin } c.\ \text{Cos } B;\\ \text{Cos } c = \text{Cos } a.\ \text{Cos } b + \text{Sin } a.\ \text{Sin } b.\ \text{Cos } C.\end{array}\right\} \ldots . (\text{II}).$$

$$\text{Откуда } \text{Cos } A = \frac{\text{Cos } a - \text{Cos } b.\ \text{Cos } c}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c}; \quad \ldots \ldots . (\text{III}).$$

$$\text{Cos } B = \frac{\text{Cos } b - \text{Cos } a.\ \text{Cos } c}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } c}; \quad \text{Cos } C = \frac{\text{Cos } c - \text{Cos } a.\ \text{Cos } b}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } b}.$$

*Примѣчаніе 1.* По формулѣ (II) можно по двумъ даннымъ сторонамъ и по углу между ними отыскать третью сторону, а по формулѣ (III), зная три стороны отыскать уголъ, противолежащій одной изъ нихъ.

*Примѣч.* 2 Хотя теорема эта доказана, по чертежу, только для треугольника въ которомъ стороны и углы находятся въ первой четверти, но не трудно доказать справедливость ея и для всякаго треугольника, у котораго углы тупые и стороны болѣе 90°.

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ $B > 90°$, а также $c > 90°$, $b > 90°$. Дополнивъ данный треугольникъ въ сферическій двусторонникъ $ACA'B$ (черт. 17) и взявъ, прилежащій данному, треугольникъ $A'BC$, въ которомъ $A'C = b'$, $A'B = c'$, получимъ $A = A'$, $b' = 180° - b$, $c' = 180° - c$ и $ABC = 180° - B$.

Но въ треугольникѣ $A'BC$.

$$\text{Cos } a = \text{Cos } b' . \text{Cos } c' + \text{Sin } b' . \text{Sin } c' . \text{Cos } A',$$ подставивъ,

найдемъ $\text{Cos } a = \text{Cos } (180° - b) . \text{Cos } (180° - c) + \text{Sin } (180° - b) . \text{Sin } (180° - c) . \text{Cos} A$

или $\text{Cos } a = (-\text{Cos } b) . (-\text{Cos } c) + \text{Sin } b . \text{Sin } c . \text{Cos } A$,

откуда $\text{Cos } a = \text{Cos } b . \text{Cos } c + \text{Sin } b . \text{Sin } c . \text{Cos } A$.

Пусть уголъ $A > 90°$, и притомъ каждая изъ сторонъ $b$ и $c$ болѣе 90°, то по теоремѣ 2 (черт. 18)

$$\text{Cos } a' = \text{Cos } b . \text{Cos } c' + \text{Sin } b . \text{Sin } c' . \text{Cos } B'AC,$$ откуда

$$\text{Cos } (180° - a) = \text{Cos } b . \text{Cos } (180° - c) + \text{Sin } b . \text{Sin } (180° - c) . \text{Cos } (180° - A)$$

$$-\text{Cos } a = \text{Cos } b . (-\text{Cos } c) + \text{Sin } b . \text{Sin } c . (-\text{Cos } A)$$

$$-\text{Cos } a = -\text{Cos } b . \text{Cos } c - \text{Sin } b . \text{Sin } c . \text{Cos } A,$$

перемножая всѣ члены на $-1$, получимъ

$$\text{Cos } a = \text{Cos } b . \text{Cos } c + \text{Sin } b . \text{Sin } c . \text{Cos } A.$$

*Примѣч.* 3. Въ формулахъ (III)

$$\text{Cos } A = \frac{\text{Cos } a - \text{Cos } b . \text{Cos } c}{\text{Sin } b . \text{Sin } c}, \quad \text{Cos } B = \frac{\text{Cos } b - \text{Cos } a . \text{Cos } c}{\text{Sin } b . \text{Sin } c}$$

положивъ $a = b$, получимъ $A = B$,

т. е. что *во всякомъ сферическомъ треугольникѣ равнымъ сторонамъ противолежатъ равные углы, что и составляетъ отдѣльную геометрическую теорему, и можетъ быть доказано независимо, помощію чертежа.*

*Примѣч.* 4. Въ формулѣ $\text{Cos } a = \text{Cos } b . \text{Cos } c + \text{Sin } b . \text{Sin } c . \text{Cos } A$ положивъ $A = 90°$, получимъ $\text{Cos } A = 0$, слѣд. $\text{Cos } a = \text{Cos } b . \text{Cos } c$, что и составляетъ первую теорему для прямоугольныхъ сфер. треугольниковъ (§ 2).

*Примѣч.* 5. Разсматривая уравненіе Cos a. (II), находимъ, что если $b$, $c$ и $A$ будутъ каждая менѣе 90°, то Cos a будетъ положительный, слѣдовательно $a < 90$, потому что $\text{Cos } a = \text{Cos } b . \text{Cos } c + \text{Sin } b . \text{Sin } c . \text{Cos } A$;

$$\overset{\frown}{+} \qquad + \quad + \qquad + \quad + \quad +$$

такое же заключеніе можно сдѣлать и о величинахъ Cos b и Cos c, если всѣ остальныя величины, отъ которыхъ онѣ по формулѣ зависятъ, будутъ каждая $< 90°$. Слѣдовательно, если въ сферическомъ треугольникѣ двѣ стороны и уголъ между ними будутъ каждыя менѣе 90°, то и третья сторона менѣе 90°.

Затрудненіе при опредѣленіи знака при Cos a можетъ встрѣтиться только тогда, когда при данныхъ $b$, $c$ и $A$ оба члена уравненія $\text{Cos } b . \text{Cos } c$ и $\text{Sin } b$ $\text{Sin } c . \text{Cos } A$ будутъ имѣть противные знаки. Въ этомъ случаѣ должно оба члена вычислить помощію логариѳмовъ и замѣтить, которое произведеніе болѣе, искомому же косинусу будетъ всегда соотвѣтствовать знакъ бо́льшаго члена.

### ТЕОРЕМА 3.

*Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ косинусъ одного изъ угловъ равенъ* минусъ *произведенію косинусовъ двухъ прочихъ угловъ вмѣстѣ съ произведеніемъ синусовъ этихъ угловъ на косинусъ стороны противолежащей первому углу*, т. е.

$$\text{Cos A} = -\text{Cos B. Cos C} + \text{Sin B. Sin C. Cos a.}$$

*Докозательство.* Данному треугольнику ABC начертивъ полярный A′ B′ C′ (см. сфер. геом.), и назвавъ стороны послѣдняго черезъ a,′ b′, c′, по угламъ противолежащимъ (черт. 3), получ. $\text{Cos a}' = \text{Cos b}'. \text{Coc c}' + \text{Sin b}'. \text{Sin c}'. \text{Cos A}'$ (теор 2, § 4);

$$\text{но } a' = 180^\circ - A, \quad c' = 180^\circ - C$$
$$b' = 180^\circ - B, \quad \text{и } A' = 180^\circ - a;$$

подставивъ, найдемъ

$$\text{Cos}(180^\circ - A) = \text{Cos}(180^\circ - B)\,\text{Cos}(180^\circ - C) + \text{Sin}(180^\circ - B)\,\text{Sin}(180^\circ - C).\,\text{Cos}(180^\circ - a),$$

$$-\text{Cos A} = (-\text{Cos B}).\,(-\text{Cos C}) + \text{Sin B. Sin C. }(-\text{Cos a})$$

$$-\text{Cos A} = \text{Cos B. Cos C} - \text{Sin B. Sin C. Cos a},$$

или (1) $\text{Cos A} = -\text{Cos B. Cos C} + \text{Sin B. Sin C. Cos a.}$ . (IV);

такимъ же образомъ получимъ

$$\left.\begin{array}{l}(2)\ \text{Cos B} = -\text{Cos A. Cos C} + \text{Sin A. Sin C. Cos b} \\ (3)\ \text{Cos C} = -\text{Cos A. Cos B} + \text{Sin A. Sin B. Cos c}\end{array}\right\}\ (\text{IV}).$$

откуда $\text{Cos a} = \dfrac{\text{Cos A} + \text{Cos B. Cos C}}{\text{Sin B. Sin C}}$; $\text{Cos b} = \dfrac{\text{Cos B} + \text{Cos A. Cos C}}{\text{Sin A. Sin C}}$,

$$\text{Cos c} = \frac{\text{Cos C} + \text{Cos A. Cos B}}{\text{Sin A. Sin B}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{V}).$$

*Примѣч. 1.* По формуламъ (IV), зная два угла и сторону имъ прилежащую, можно отыскать уголъ противолежащій этой сторонѣ; а помощію формулъ (V) по тремъ угламъ сферическаго треугольника отыскиваютъ его стороны. Преобразованія этихъ формулъ въ логариѳмическія помѣщены далѣе.

*Примѣч.* 2. Въ формулахъ (1, IV), положивъ $A = 90^\circ$, получимъ для прямоугольнаго треугольника, $0 = -\text{Cos B. Cos C} + \text{Sin B Sin C. Cos a}$, откуда $\text{Cos a} = \text{Cotg B. Cotg C}$, что и было выведено помощію мнемоническихъ правилъ Непера.

Изъ формулъ же (2 и 3, IV) получимъ $\left.\begin{array}{l}\text{Cos B} = \text{Sin C. Cos b}, \\ \text{Cos C} = \text{Sin B. Cos c}.\end{array}\right\}$ См. прав. Непера.

*Примѣч.* 3. Изъ изслѣдованія формулы V получаемъ, что если каждый изъ угловъ треугольника менѣе 90°, то и каждая изъ сторонъ менѣе 90°.

### ТЕОРЕМА 4.

*Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ, если четыре части A, b, C, a (черт.* 19) *лежатъ рядомъ, то двѣ части (A и a,)—*

*изъ которыхъ одинъ уголъ и противолежащая ему сторона,—будутъ частями крайними, а другой уголъ (C) и сторона (b) будутъ частями средними.*

Между этими четырьмя рядомъ лежащими частями существуетъ слѣдующее мнемоническое отношеніе:

*Котангенсъ крайняго угла помноженный на синусъ средняго равенъ произведенію котангенса крайней стороны на синусъ средней, безъ произведенія косинусовъ среднихъ величинъ*, (*) т. е.

$$\text{Cotg } A . \text{ Sin } C = \text{Cotg } a . \text{ Sin } b - \text{Cos } b . \text{ Cos } C.$$

*Доказат.* 1, *помощію чертежа.*

Вершиною даннаго крайняго угла A, какъ полюсомъ, описавъ дугу большаго круга, и продоливъ стороны, содержащія этотъ уголъ, до пересѣченія въ точкахъ D и E съ описанною дугою, получимъ что $DC = 90^0 - b$ (черт. 19);
$BE = 90^0 - c$, $DE = A$ и $\angle DCB = 180^\circ - C$.

Вершину третьяго угла B, не входящаго въ формулу, соединивъ съ точкою D, получимъ

$$\text{Cos } DB = \text{Cos } DE . \text{ Cos } BE = \text{Cos } A . \text{ Cos } (90^0 - c)$$

или $\text{Cos } DB = \text{Cos } A . \text{ Sin } c$ . . . . . . . . . . . ($\alpha$);

но и $\text{Cos } DB = \text{Cos } DC . \text{ Cos } BC + \text{Sin } DC . \text{ Sin } BC . \text{ Cos } (180^\circ - C)$;

$$\text{Cos } DB = \text{Cos } (90^0 - b) . \text{ Cos } a + \text{Sin } (90^0 - b) . \text{ Sin } a \ (-\text{Cos} C),$$

$$\text{Cos } DB = \text{Sin } b . \text{ Cos } a - \text{Cos } b . \text{ Sin } a . \text{ Cos } C \quad . \ . \ . \quad (\beta)$$

Соединивъ формулы ($\alpha$) и ($\beta$), получимъ

$$\text{Cos } A . \text{ Sin } c = \text{Sin } b . \text{ Cos } a - \text{Cos } b . \text{ Sin } a . \text{ Cos } C \quad . \ . \quad (\gamma);$$

но $\text{Sin } c = \dfrac{\text{Sin } C . \text{ Sin } a}{\text{Sin } A}$, подставивъ, и раздѣливъ обѣ части уравненія на Sin a, получимъ

(1) $\text{Cotg } A . \text{ Sin } C = \text{Cotg } a . \text{ Sin } b - \text{Cos } b . \text{ Cos } C$. . . (VI).

*Доказат. 2. Аналитическій выводъ той же формулы.*

Въ уравненіи $\text{Cos } a = \text{Cos } b . \text{ Cos } c + \text{Sin } b . \text{ Sin} . \ c . \text{ Cos } A$,
исключивъ Cos c, получимъ

$\text{Cos } a = \text{Cos } b . (\text{Cos } a . \text{ Cos } b + \text{Sin } a . \text{ Sin } b \text{ Cos } C) + \text{Sin } b \text{ Sin } c \text{ Cos } A.$,

$\text{Cos } a = \text{Cos } a \text{ Cos}^2 b + \text{Sin } a \text{ Sin } b \text{ Cos } b \text{ Cos } C + \text{Sin } b \text{ Sin } c . \text{ Cos } A$,

$\text{Cos } a - \text{Cos } a \text{ Cos}^2 b = \text{Sin } a \text{ Sin } b \text{ Cos } b \text{ Cos } C + \text{Sin } b \text{ Sin } c \text{ Cos } A$,

$\text{Cos } a \text{ Sin}^2 b = \text{Sin } a \text{ Sin } b \text{ Cos } b \text{ Cos } C + \text{Sin } b \text{ Sin } c . \text{ Cos } A$

сокращая на Sin b, получимъ

$\text{Cos } a \text{ Sin } b = \text{Sin } a \text{ Cos } b \text{ Cos } C + \text{Sin } c . \text{ Cos } A$, или

$\text{Cos } A \text{ Sin } c = \text{Cos } a \text{ Sin } b - \text{Sin } a \text{ Cos } b \text{ Cos } C$,

подставивъ вмѣсто Sin c равную ему величину $\dfrac{\text{Sin } C \text{ Sin } a}{\text{Sin } A}$, потомъ раздѣливъ

---

(*) Мнемоническое правило это составлено мною, и было напечатано въ первый разъ въ Морск. Сб. 1857 г. № 1, при обзорѣ математич. учебн. руководствъ.

обѣ части уравненія на Sin a, и, упростивъ гдѣ можно, получимъ Cotg A. Sin C = Cotg a. Sin b — Cos b. Cos C.

Такимъ же образомъ выводятся слѣдующія пять формулъ:

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & \text{Cotg } A.\ \text{Sin } B = \text{Cotg } a.\ \text{Sin } c - \text{Cos } c\ \text{Cos } B \\ (3) & \text{Cotg } B.\ \text{Sin } C = \text{Cotg } b\ \ \text{Sin } a - \text{Cos } a.\ \text{Cos } C \\ (4) & \text{Cotg } B.\ \text{Sin } A = \text{Cotg } b.\ \text{Sin } c - \text{Cos } c.\ \text{Cos } A \\ (5) & \text{Cotg } C.\ \text{Sin } B = \text{Cotg } c.\ \text{Sin } a - \text{Cos } a.\ \text{Cos } B \\ (6) & \text{Cotg } C.\ \text{Sin } A = \text{Cotg } c.\ \text{Sin } b - \text{Cos } b.\ \text{Cos } A\end{array}\right\} \text{(VI)}.$$

*Примѣч.* Въ формулѣ (1, VI) положивъ A = 90°, получимъ

0 = Cotg a. Sin b — Cos b. Cos C, откуда

Cos C = Cotg a. Tang b, такимъ же образомъ Cos B = Cotg a. Tang c. (изъ 2, VI).

Изъ (4 и 6, VI) при томъ же положеніи найдемъ.

Cotg B = Cotg b. Sin c и Cotg C = Cotg c. Sin b, или

$$\text{Sin } c = \frac{\text{Cotg } B}{\text{Cotg } b} = \text{Cotg } B.\ \text{Tang } b \text{ и } \text{Sin } b = \frac{\text{Cotg } C}{\text{Cotg } c} = \text{Cotg } C.\ \text{Tang } c$$

Всѣ эти формулы для прямоугольнаго треугольника были выведены независимо, помощію мнемоническихъ правилъ Непера (См. прав. 1 ое и 2-ое.)

*Примѣч.* 2. Формулы (VI) показываютъ зависимость между двумя сторонами и двумя углами, изъ которыхъ одинъ уголъ противолежитъ данной сторонѣ, а другой содержится между ними.

## *Общее примѣчаніе къ предыдущимъ теоремамъ.*

Изъ выведенныхъ нами основныхъ формулъ для рѣшенія сферическихъ треугольниковъ, (формулы I, II, III, IV, V, VI), только одна первая удобна для непрерывнаго логариѳмованія; при вычисленіи же искомыхъ величинъ по остальнымъ формуламъ необходимо переходитъ отъ логариѳмовъ тригонометрическихъ линій къ логариѳмамъ чиселъ, и обратно. Для избѣжанія этого неудобства нелогариѳмическія формулы обыкновенно преобразуются въ логариѳмическія, слѣдующимъ образомъ:

## Обращеніе главныхъ нелогариѳмическихъ формулъ въ логариѳмическія.

### Задача 1.

*Формулу Cos a = Cos b. Cos c + Sin b. Sin c. Cos A обратить въ логариѳмическую.*

*Рѣшеніе.* Обращеніе это производится черезъ разложеніе данной формулы на двѣ логариѳмическія, помощію вспомогательнаго угла (плоск. тр. §. 12).

$$\text{Cos } a = \text{Cos } b.\ \text{Cos } c + \text{Sin } b.\ \text{Sin } c.\ \text{Cos } A, \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

$$\text{Cos a} = \text{Cos b}.\ (\text{Cos c} + \text{Sin c}\,\frac{\text{Sin b}}{\text{Cos b}}\cdot\text{Cos A})$$

$$= \text{Cos b}\ (\text{Cos c} + \text{Sin c}.\ \text{Tang b}.\ \text{Cos A});$$

положивъ $\text{Tang b}.\ \text{Cos A} = \text{Tang}\ \varphi$ . . . . . . . . . (1)

и подставивъ въ предыдущую формулу, получимъ

$$\text{Cos a} = \text{Cos b}\ (\text{Cos c} + \text{Tang}\ \varphi\ \text{Sin c}),$$

$$= \text{Cos b}\ (\text{Cos c} + \frac{\text{Sin}\ \varphi}{\text{Cos}\ \varphi}\cdot\text{Sin c})$$

$$= \text{Cos b}\ \frac{(\text{Cos c}.\ \text{Cos}\ \varphi + \text{Sin}\ \varphi.\ \text{Sin c})}{\text{Cos}\ \varphi},$$

$$= \frac{\text{Cos b}}{\text{Cos}\ \varphi}\ \text{Cos}\ (\text{c}-\varphi)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Такимъ образомъ вмѣсто данной формулы получаются двѣ логариѳмическія:

$$\text{Tang b}.\ \text{Cos A} = \text{Tang}\ \varphi\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

$$\text{и Cos a} = \frac{\text{Cos b}}{\text{Cos}\ \varphi}\cdot\text{Cos}\ (\text{c}-\varphi)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2),$$

помощію которыхъ сперва отыскивается величина вспомогательнаго угла $\varphi$, а потомъ уже опредѣляется и величина a.

*Примѣч.* 1. Эти же формулы могутъ быть выведены непосредственно, черезъ построеніе:

a) При выводѣ формулы (II) мы имѣли (черт. 14; № 2) SE = Cos a, SD = Cos b, FD = Sin b Cos A. (т 2, §4).

Но въ четыреугольникѣ SEFD, положивъ FSD $= \varphi$,

получимъ $\text{Tang}\ \varphi = \frac{\text{FD}}{\text{SD}} = \frac{\text{Sin b Cos A}}{\text{Cos b}} = \text{Tang b}.\ \text{Cos A}$,

или $\text{Tang b Cos A} = \text{Tang}\ \varphi$ . . . . . . . . . . . . . . . . . (1);

притомъ $\text{SD} = \text{SF}.\ \text{Cos}\ \varphi$ или $\text{Cos b} = \text{SF}.\ \text{Cos}\ \varphi$; откуда $\text{SF} = \frac{\text{Cos b}}{\text{Cos}\ \varphi}$,

а $\text{SE} = \text{SF}.\ \text{Cos}\ (\text{c}-\varphi) = \frac{\text{Cos b}}{\text{Cos}\ \varphi}\cdot\text{Cos}\ (\text{c}-\varphi)$.

Слѣдовательно $\text{Tang b}.\ \text{Cos A} = \text{Tang}\ \varphi$ . . . . . . . . . . (1),

$$\text{Cos a} = \frac{\text{Cos b}}{\text{Cos}\ \varphi}\ \text{Cos}\ (\text{c}-\varphi)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2),$$

что и согласуется вполнѣ съ выведеннымъ нами разложеніемъ данной формулы.

b) Тѣ же формулы получатся изъ даннаго сферическаго треугольника, если отъ одного изъ концевъ C искомой стороны на противолежащую сторону опустимъ перпедикуляръ CN (черт. 20).

Положивъ отсѣкъ AN $= \varphi$, найдемъ, что NB $= \text{c} - \varphi$.

Но въ △ CAN, $\text{Cos A} = \text{Cotg b}.\ \text{Cotg}\ (90-\varphi)$,

или $\text{Cos A} = \text{Cotg b}.\ \text{Tang}\ \varphi$, откуда $\text{Tang}\ \varphi = \frac{\text{C}}{\text{Cotg b}}$

Слѣдовательно $\text{Tang}\ \varphi = \text{Tang b Cos A}$ . . . . . . . . . . (1),

Въ томъ же треугольникѣ $\text{Cos b} = \text{Cos CN}.\ \text{Cos}\ \varphi$,

слѣдоват. $\text{Cos CN} = \dfrac{\text{Cos b}}{\text{Cos }\varphi}$ . . . . . . . . ($\alpha$)

Но въ треугольникѣ CNB

$$\text{Cos a} = \text{Cos CN. Cos NB}$$
$$\text{Cos a} = \text{Cos CN. Cos }(c-\varphi),$$

вмѣсто Cos CN, изъ уравненія ($\alpha$), подставивъ $\dfrac{\text{Cos b}}{\text{Cos }\varphi}$

получимъ $\text{Cos a} = \dfrac{\text{Cos b}}{\text{Cos }\varphi}\text{ Cos }(c-\varphi)$ . . . . . . . . . . . . . . (2).

Если перпендикуляръ упалетъ внѣ треугольника, то первая формула (1) остается та же самая, а вмѣсто второй получимъ

$$\text{Cos a} = \frac{\text{Cos b}}{\text{Cos }\varphi}\text{. Cos }(\varphi-c).$$ (черт. 20, № 2).

*Примѣч.* 2. Какъ помощію мнемоническихъ правилъ Непера, такъ и помощію геометрическихъ построеній не трудно доказать, что во всякомъ сферическомъ треугольникѣ *если углы при основаніи одинаки, то перпендикуляръ падаетъ внутри треугольника, а если углы при основаніи не одинаки, то перпендикуляръ падаетъ внѣ треугольника, и обратно.*

### ЗАДАЧА 2.

*Формулу (IV, 3) Cos C = — Cos A. Cos B + Sin A. Sin B. Cos c разложить на двѣ логариѳмическія.*

*Рѣшеніе.* $\text{Cos C} = \text{Cos B}\ \dfrac{(\text{Sin A. Sin B. Cos c}}{\text{Cos B}} - \text{Cos A}),$

$$= \text{Cos B (Sin A. Tg B. Cos c} - \text{Cos A}); \text{ но}$$

положивъ $\text{Tg B. Cos c} = \text{Cotg x},$ . . . . . . . . . (1)

получимъ $\text{Cos C} = \dfrac{\text{Cos B}}{\text{Sin x}}\text{ Sin }(A-x)$. (См. предыд. зад.) . (2).

### ЗАДАЧА 3.

*Формулу (VI) Cotg A. Sin C = Cotg a. Sin b — Cos b. Cos C разложить на двѣ логариѳмическія:*

A) Для отысканія неизвѣстной C.

*Рѣшеніе.* Изъ даннаго уравненія получимъ

$$\text{Cotg A. Sin C} + \text{Cos b. Cos C} = \text{Cotg a. Sin b},$$

$$\text{Cos b (Cos C.} + \frac{\text{Cotg A}}{\text{Cos b}}\cdot\text{Sin C}) = \text{Cotg a. Sin b},$$

положивъ $\dfrac{\text{Cotg A}}{\text{Cos b}} = \text{Cotg y}$ . . . . . . . . . . . (1),

получимъ $\text{Cos b (Cos C} + \text{Cotg y. Sin C}) = \text{Cotg a. Sin b},$

$$\text{Cos b (Cos C} + \frac{\text{Cos y}}{\text{Sin y}}\cdot\text{Sin C}) = \text{Cotg a. Sin b},$$

$$\text{Cos } b \left( \frac{\text{Cos } C.\ \text{Sin } y + \text{Cos } y.\ \text{Sin } C}{\text{Sin } y} \right) = \text{Cotg } a.\ \text{Sin } b,$$

$$\frac{\text{Cos } b}{\text{Sin } y} \text{Sin } (C + y) = \text{Cotg } a.\ \text{Sin } b, \text{ или}$$

$$\text{Sin } (C + y) = \text{Cotg } a.\ \text{Tang } b.\ \text{Sin } y \ldots (2).$$

Слѣдовательно вмѣсто уравненія (VI) получаемъ двѣ формулы:

$$\frac{\text{Cotg } A}{\text{Cos } b} = \text{Cotg } y \ldots\ldots (1),$$

$$\text{и Sin } (C + y) = \text{Cotg } a.\ \text{Tang } b.\ \text{Sin } y \ldots (2).$$

B) Для отысканія неизвѣстной b. 1. *Способъ аналитическій*.

Изъ даннаго уравненія получаемъ:

$$\text{Cotg } a.\ \text{Sin } b - \text{Cos } b.\ \text{Cos } C = \text{Cotg } A.\ \text{Sin } C,$$

полагая $\frac{\text{Cos } C}{\text{Cotg } a} = \text{Tang } \varphi$ или $\frac{\text{Cotg } a}{\text{Cos } C} = \text{Cotg } \varphi \ldots (1)$,

какъ въ формулѣ (A), найдемъ

$$\text{Sin } (b - \varphi) = \text{Cotg } A.\ \text{Tang } C.\ \text{Sin } \varphi \ldots\ldots (2).$$

2. *Выводъ тѣхъ же формулъ черезъ разложеніе треугольника на прямоугольные.*

Проведя дугу BD $\perp$ AC (черт. 6, № 1) и положивъ $\smile$ DC $= \varphi$, изъ треугольника CBD получимъ

Cos C $=$ Cotg a. Cotg ($90^\circ - \varphi$), по 1-му прав. Непера,

или Cos C $=$ Cotg a. Tang $\varphi$, откуда Tang $\varphi = \frac{\text{Cos } C}{\text{Cotg } a} \ldots\ldots (1)$.

Въ томъ же треугольникѣ Cos ($90^\circ - \varphi$) $=$ Cotg C. Cotg ($90^\circ -$ DB),

или Sin $\varphi =$ Cotg C. Tang DB,

откуда Tg. DB $= \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Cotg } C}$, или Tg. DB $=$ Sin $\varphi$. Tang C.

Но въ треугольникѣ ADB

Cos ($90^\circ - (b - \varphi)$) $=$ Cotg A. Cotg ($90^\circ -$ DB), по мнем. правиламъ Непера,

или Sin ($b - \varphi$) $=$ Cotg A. Tang DB,

подставивъ въ послѣднюю формулу, вмѣсто Tang DB, равную ему величину Tang C. Sin $\varphi$, получимъ

$$\text{Sin } (b - \varphi) = \text{Cotg } A.\ \text{Tang } C.\ \text{Sin } \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Что и показываетъ тождество между формулами вспомогательныхъ угловъ и разложеніемъ даннаго треугольника на прямоугольные.

*Примѣч.* Способъ рѣшенія треугольниковъ по формуламъ (1) и (2), или помощію *вспомогательныхъ угловъ*, называется также *способомъ рѣшенія по отсѣкамъ*, и употребляется преимущественно въ тѣхъ случаяхъ, когда надо вычислить не всѣ части треугольника, а только нѣкоторыя изъ нихъ. При вычисленіи же всего треугольника по отсѣкамъ берутъ обыкновенно *два вспомогательныхъ угла*: одинъ для вычисленія стороны, а другой для вычисленія угла.

*Примѣч.* Такъ какъ въ нѣкоторыхъ изъ формулъ, нами выведенныхъ, искомыя величины выражены въ синусахъ, черезъ что получаются двойственныя рѣшенія, то, для избѣжанія этого неудобства, при вычисленіи треугольниковъ предпочитаютъ употребленіе такихъ формулъ, въ которыхъ искомыя величи-

ны выражены въ половинныхъ углахъ. Главнѣйшія изъ этихъ формулъ суть слѣдующія:

**Теорема 5.**

Первая формула полупериметра. *Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ квадратъ синуса половины одного изъ угловъ равенъ произведенію синусовъ разностей полупериметра треугольника предъ каждою изъ сторонъ содержащихъ этотъ уголъ, дѣленному на произведеніе синусовъ сторонъ содержащихъ тотъ же уголъ*, т. е.

$$\mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\mathrm{Sin}\,(p-b).\ \mathrm{Sin}\,(p-c)}{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c}.$$

*Доказательство.* Уже извѣстно, что

$$\mathrm{Cos}\,A = \frac{\mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Cos}\,b.\ \mathrm{Cos}\,c}{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c}\ (\mathrm{III}),\ \text{слѣд.}$$

$$1 - \mathrm{Cos}\,A = \frac{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c - \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Cos}\,b.\ \mathrm{Cos}\,c}{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c} = \frac{\mathrm{Cos}\,(b-c) - \mathrm{Cos}\,a}{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c}$$

$$= \frac{2\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b-c).\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(a+c-b)}{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c}.$$

Но $1 - \mathrm{Cos}\,A = 2\ \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,A$, притомъ, полагая

$a + b + c = 2p$, $\tfrac{1}{2}(a + b + c) = p$, получимъ $\tfrac{1}{2}(a + b - c) = p - c$, $\tfrac{1}{2}(a + c - b) = p - b$,

подставивъ вмѣсто равныхъ равныя,

$$\text{найдемъ}\ \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,A = \frac{\mathrm{Sin}\,(p-b).\ \mathrm{Sin}\,(p-c)}{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{VII}).$$

Такимъ же образомъ и для другихъ угловъ

$$\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{\mathrm{Sin}(p-a).\ \mathrm{Sin}\,(p-c)}{\mathrm{Sin}\,a.\ \mathrm{Sin}\,c};\ \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{\mathrm{Sin}(p-a).\ \mathrm{Sin}(p-b)}{\mathrm{Sin}\,a.\ \mathrm{Sin}\,b}\ (\mathrm{VII}).$$

Вторая формула полупериметра. Подобная же формула можетъ быть выведена и для косинуса, а именно:

*Квадратъ косинуса половины одного изъ угловъ сферическаго треугольника равенъ произведенію синуса полупериметра треугольника на синусъ разности полупериметра предъ стороною противолежащею этому углу, дѣленному на произведеніе синусовъ сторонъ содержащихъ этотъ уголъ*, т. е.

$$\mathrm{Cos}^2\,\tfrac{1}{2}\,A = \frac{\mathrm{Sin}\,p.\ \mathrm{Sin}\,(p-a)}{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c}.$$

*Доказат.* $\mathrm{Cos}\,A = \dfrac{\mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Cos}\,b.\ \mathrm{Cos}\,c}{\mathrm{Sin}\,b.\ \mathrm{Sin}\,c}$, слѣдовательно

$$1 + \text{Cos } A = \frac{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c + \text{Cos } a - \text{Cos } b.\text{Cos } c}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c} = \frac{\text{Cos } a - \text{Cos } (b + c)}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c}$$

$$= \frac{2\ \text{Sin } \tfrac{1}{2}(a + b + c).\ \text{Sin } \tfrac{1}{2}(b + c - a)}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c}.$$

Но $1 + \text{Cos } A = 2\ \text{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A$, притомъ $\tfrac{1}{2}(a + b + c) = p$, $\tfrac{1}{2}(b + c - a) = p - a$, подставивъ, получимъ

$$\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - a)}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VIII)}.$$

Такимъ же образомъ выведемъ

$$\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - b)}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } c},\ \text{Cos}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin } p.\ \text{Sin}(p - c)}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } b} \ldots \text{(VIII)}.$$

Третья формула полупериметра. *Квадратъ тангенса половины одного изъ угловъ равенъ произведенію синусовъ разности полупериметра треугольника предъ каждою изъ сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ, раздѣленному на произведеніе изъ синуса полупериметра на синусъ разности полупериметра предъ стороною противолежащею тому же углу*, т. е.

$$\text{Tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{Sin } (p - b).\ \text{Sin } (p - c)}{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - a)}.$$

*Доказат.* $\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{Sin } (p - b).\ \text{Sin } (p - c)}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c}$, $\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - a)}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c}$ — раздѣливъ равныя на равныя,

получимъ $$\frac{\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A}{\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A} = \text{Tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{Sin } (p - b).\ \text{Sin } (p - c)}{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - a)} \ldots \text{(IX)}.$$

Такимъ же образомъ выведемъ и для другихъ угловъ:

$$\text{Tg}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\text{Sin}(p - a).\ \text{Sin } (p - c)}{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - b)};\ \text{Tg}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin } (p - a).\text{Sin } (p - b)}{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - c)} \ldots \text{(IX)}.$$

*Примѣч.* 1. Изъ выведенныхъ (VII), (VIII), (IX) формулъ нетрудно получить слѣдующія:

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin } (p - b).\ \text{Sin } (p - c)}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c}},\quad \text{Sin } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{Sin } (p - a).\ \text{Sin } (p - c)}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } c}},\quad \text{Sin } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{Sin } (p - a).\ \text{Sin } (p - b)}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } b}}.$$

(VII) и (VIII)

$$\text{Cos } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - a)}{\text{Sin } b.\ \text{Sin } c}},\quad \text{Cos } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - b)}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } c}},\quad \text{Cos } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - c)}{\text{Sin } a.\ \text{Sin } b}}$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{Sin } (p - b).\ \text{Sin } (p - c)}{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - a)}},$$

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{Sin } (p - a)\ \text{Sin } (p - b)}{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - b)}},\ \text{Tang } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{Sin } (p - a).\ \text{Sin } (p - b)}{\text{Sin } p.\ \text{Sin } (p - b)}}\ \text{(IX)}$$

Изъ этихъ же формулъ для цѣлыхъ угловъ получаемъ:

$$\operatorname{Sin} A = \frac{\operatorname{Sin} b . \operatorname{Sin} c}{2} \sqrt{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} (p-a) \operatorname{Sin} (p-b) \operatorname{Sin} (p-c)};$$

$$\operatorname{Sin} B = \frac{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} c}{2} \sqrt{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} (p-a) \operatorname{Sin} (p-b) \operatorname{Sin} (p-c)};$$

$$\operatorname{Sin} C = \frac{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b}{2} \sqrt{\operatorname{Sin} p . \operatorname{Sin} (p-a) \operatorname{Sin} (p-b) \operatorname{Sin} (p-c)};$$

гдѣ подкоренная величина для всѣхъ угловъ остается одна и таже.

*Примѣч.* 2. Формулы (VII), (VIII) и (IX) служатъ для вычисленія угловъ по тремъ сторонамъ треугольника. Но должно замѣтить, что всякая формула, опредѣляющая искомый уголъ по синусу, дѣлается непримѣнимою при вычисленіи, когда этотъ уголъ мало разнствуетъ отъ 90° (или 270°), потому что около этихъ предѣловъ весьма малая перемѣна синуса соотвѣтствуетъ значительной перемѣнѣ угла, а потому число десятичныхъ, на которое логариѳмы тригонометрическихъ линій вычислены въ обыкновенныхъ таблицахъ, недостаточно для вѣрнаго опредѣленія угловъ по синусу, когда они приближаются къ упомянутымъ предѣламъ. Формулы же, опредѣляющія искомый уголъ по косинусу, подвержены тому же недостатку, когда уголъ мало разнствуетъ отъ 0° или 180°. По этой причинѣ рѣшенія тригонометрическихъ вопросовъ тогда только могутъ считаться точными, когда вычисленія производимы были по формуламъ тангенса или котангенса искомыхъ угловъ, потому что тригонометрическія линіи эти, измѣняясь быстро, при всѣхъ величинахъ искомаго угла даютъ точное его опредѣленіе. Отсюда понятно, почему по формуламъ, нами предложеннымъ, вычисленіе должно быть производимо въ синусахъ, когда величина угла находится между 0° и 90°, и въ косинусахъ, когда искомый уголъ между 90° и 180°. Если же величина угла совершенно неизвѣстна, то должно предпочитать вычисленіе по формуламъ тангенса (IX). Послѣдняя формула имѣетъ еще то преимущество предъ первыми (VII) и (VIII), что для вычисленія по ней всѣхъ трехъ угловъ треугольника необходимо отыскать только четыре логариѳма: p, p — a, p — b, p — c; между тѣмъ какъ при рѣшеніи того же вопроса по формуламъ синусовъ или косинусовъ, потребовалось бы отысканіе шести или семи логариѳмовъ.

При этомъ необходимо замѣтить, что во всѣхъ этихъ формулахъ радикалъ долженъ быть взятъ со знакомъ плюсъ, потому что тригонометрическія линіи острыхъ угловъ суть величины положительныя.

*Примѣч.* Уравненіе тангенса можетъ быть выведено и независимо отъ $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}A$ и $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}A$, а именно помощію формулы $\mathrm{Tang}^2\,\frac{1}{2}A = \frac{1+\mathrm{Cos}\,A}{1-\mathrm{Cos}\,A}$, если подставимъ соотвѣтствующія величины вмѣсто Cos A.

### ТЕОРЕМА 6.

*Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ*

$$\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\mathrm{Cos}\,P.\ \mathrm{Cos}\,(P-A)}{\mathrm{Cos}\,(P-B).\ \mathrm{Cos}\,(P-C)}},\ \text{гдѣ}\ P = \tfrac{1}{2}(A+B+C).$$

*Доказательство.* Уже выведено было, что

$$\mathrm{Cos}\,a = \frac{\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,B.\ \mathrm{Cos}\,C}{\mathrm{Sin}\,B.\ \mathrm{Sin}\,C}\ (\mathrm{V});$$

но $\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\,a}{1-\mathrm{Cos}\,a}}$; подставивъ въ это уравненіе формулу (V) получимъ

$$\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B+C).\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B-C).\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A+C-B)}},$$

$$\text{откуда}\ \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\mathrm{Cos}\,P.\ \mathrm{Cos}\,(P-A)}{\mathrm{Cos}\,(P-B).\ \mathrm{Cos}\,(P-C)}}\ldots.\ (X).$$

Такія же фоумулы могутъ быть выведены и для другихъ сторонъ.

*Примѣчаніе 1.* Такъ какъ во всякомъ сферическомъ треугольникѣ сумма угловъ $A+B+C > 180^\circ$, откуда $\frac{1}{2}(A+B+C) > 90^\circ$, то понятно, что $[-\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B+C]$, или $[-\mathrm{Cos}\,P]$ есть величина положительная. Поэтому знакъ ( — ) *минусъ*, находящійся подъ корнемъ, не только не есть признакъ невозможности, но напротивъ, уничтожая мнимость, дѣлаетъ вычисляемую величину вещественною, до тѣхъ поръ, пока, при заданіи, $A+B+C > 90^\circ$.

**ЗАДАЧА.** Предлагаемъ учащимся вывести формулу

$$\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,E.\ \mathrm{Sin}\,(A-E)}{\mathrm{Sin}\,(B-E).\ \mathrm{Sin}\,(C-E)}},\ \text{гдѣ}\ 2E = A+B+C-180^\circ.$$

### ФОРМУЛЫ ГАУСА.

1) Уже доказано было, что

$\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A \pm B) = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}A.\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}B \mp \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}A.\ \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}B$,

вмѣсто Cos и Sin половинныхъ угловъ подставивъ соотвѣтствующія имъ величины (форм. VII, VIII), получимъ

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} p.\ \operatorname{Sin}(p-a)}{\operatorname{Sin} b.\ \operatorname{Sin} c}} . \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} p.\ \operatorname{Sin}(p-b)}{\operatorname{Sin} a.\ \operatorname{Sin} c}}$$

$$\mp \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-b).\ \operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} b.\ \operatorname{Sin} c}} . \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-a).\operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} a.\ \operatorname{Sin} c}};$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} p \mp \operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} c} . \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-a).\ \operatorname{Sin}(p-b)}{\operatorname{Sin} a.\ \operatorname{Sin} b}},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c.\ \operatorname{Cos}(p - \tfrac{1}{2}c)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c.\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} . \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c.\ \operatorname{Sin}(p - \tfrac{1}{2}c)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c.\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} . \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} . \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C \quad \text{I-я}$$

и Формулы Гауса.

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c} . \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C \quad \text{3-я}$$

2) $\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A.\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B \pm \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A.\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B$, подставивъ Формулы (VII) и (VIII), получимъ

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-b).\ \operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} b.\ \operatorname{Sin} c}} . \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} p.\ \operatorname{Sin}(p-b)}{\operatorname{Sin} a.\ \operatorname{Sin} c}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} p.\ \operatorname{Sin}(p-a)}{\operatorname{Sin} b.\ \operatorname{Sin} c}} . \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-a).\ \operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} a.\ \operatorname{Sin} c}},$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}(p-b) \pm \operatorname{Sin}(p-a)}{\operatorname{Sin} c} \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} p.\ \operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} a\ \operatorname{Sin} b}},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\operatorname{Sin}[p - \tfrac{1}{2}(a+b)].\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c.\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} . \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\operatorname{Cos}[p - \tfrac{1}{2}(a+b)].\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c.\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} . \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} . \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C \quad \text{2-я}$$

и Формулы Гауса

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c} . \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C \quad \text{4-я}$$

Поставивъ выведенныя нами уравненія соотвѣтственно по суммамъ и разностямъ, получимъ:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B).\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b).\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C,\\
2)\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B).\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b).\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C,\\
3)\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A-B).\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b).\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C,\\
4)\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A-B).\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a-b).\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C.
\end{array}\right\} \text{XI}$$

*Примѣчаніе.* Формулы эти называются въ Германіи *Гаусовыми*, потому что Гаусъ предложилъ ихъ въ своемъ сочиненіи: Theoria motus corporum coeles-

tium. Hamb. 1809, pag. 51; во Франціи онѣ называются *Деламбровыми*, потому что Деламбръ изложилъ ихъ въ Connaissance des temps въ 1808 году. Почти въ тоже время онѣ были открыты и математикомъ *Мольвейде*, писавшимъ объ нихъ въ Zach's monatlicher Correspondenz, Bd. 18, 1808, S. 396.

## Аналогіи Непера.

Уже доказано, что

$\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B)\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(a-b).\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}C\ (2)$ | Формулы
и $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B).\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}c = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(a+b).\ \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}C\ (1)$ | Гауса

Раздѣливъ первую изъ нихъ на вторую, получимъ

$$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(a+b)}\cdot \mathrm{Cotg}\,\frac{1}{2}C \quad .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (XII)$$

Такимъ же образомъ раздѣливъ четвертую формулу Гауса на третью (XI), получимъ

$$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b)}\cdot \mathrm{Cotg}\,\frac{1}{2}C \quad .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (XII)$$

Черезъ дѣленіе третей формулы Гауса на первую и четвертой на вторую, получимъ еще два отношенія:

$$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B)}\cdot \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}c \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (XII)$$

$$\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B)}\cdot \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}c \quad .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (XII).$$

Уравненія эти (XII), будучи написаны въ видѣ пропорцій, и для удобства удержанія ихъ въ памяти, расположенныя въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b) : \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a-b) = \mathrm{Cotg}\,\frac{1}{2}C : \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(A-B)\\
2)\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(a+b) : \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(a-b) = \mathrm{Cotg}\,\frac{1}{2}C : \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(A+B)\\
3)\ \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B) : \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A-B) = \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}c : \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a-b)\\
4)\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B) : \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(A-B) = \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}c : \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a+b)
\end{array}\right\} XII$$

по имени ихъ изобрѣтателя называются *аналогіями или пропорціями Непера*. Изобрѣтатель логариѳмическаго счисленія, Шотландскій Баронъ Неперъ, предложилъ ихъ въ 1614 году въ сочиненіи своемъ: Mirifici logarithmorum canonis descriptio.

*Примѣч.* Третья и четвертая аналогіи Непера могутъ быть выведены изъ 1-ой и 2-ой помощію полярнаго треугольника.

И дѣйствительно пусть $A'$, $B'$, $C'$ будутъ углы, а $a'$, $b'$, $c'$ стороны триуг-ка $A'B'C'$, полярнаго данному $A\ B\ C$ ( черт 3). Слѣдовательно получимъ

$a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, а потому $\frac{1}{2}(a'+b') = 180° - \frac{1}{2}(A+B)$,

и $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a'+b') = \mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A+B)$.

Такимъ же обрзэоъ найдемъ

$\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a'-b') = -\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A-B)$; $\mathrm{Cotg}\frac{1}{2}C' = \mathrm{Tang}\frac{1}{2}c$,

и $\mathrm{Tang}\frac{1}{2}(A'-B') = -\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(a-b)$.

Но какъ въ треугольникѣ $A'B'C'$

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a'+b') : \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a'-b') = \text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}C' : \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,A'-B'),$$

то подставивъ вмѣсто равныхъ равныя, получимъ

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}c : \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b).$$

Подобнымъ же образомъ четвертая аналогія можемъ быть выведена изъ 2-й. Выводъ аналогій Непера, независимо отъ формулъ Гауса, можетъ быть основанъ на формулѣ $\dfrac{\text{Tang}\,\frac{1}{2}(A \pm B)}{\text{Cotg}\,\frac{1}{2}C}$, если мы выразимъ ее сперва помощію половинныхъ угловъ, а потомъ въ зависимости отъ сторонъ сферическаго треугольника. (Annales de mathématiques de Gergone).

Изъ пропорціи $\text{Sin}\,a : \text{Sin}\,b = \text{Sin}\,A : \text{Sin}\,B$, (1) получимъ $\text{Sin}\,a + \text{Sin}\,b : \text{Sin}\,a - \text{Sin}\,b = \text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B : \text{Sin}\,A - \text{Sin}\,B$. слѣдовательно (§ 7, прям. триг. формула 23)

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b) : \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Къ формуламъ Непера относятъ обыкновенно и эту пропорцію, весьма часто употребляемую для повѣрки рѣшенія сферическихъ треугольниковъ.

*Изслѣдованіе аналогій Непера.*

1. Если въ выведенныхъ нами аналогіяхъ (XII) возьмемъ формулы косинусовъ (т. е. 2-ю или 4-ю),

напр. $\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b) : \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}C : \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B)$,

$\overline{\pm}$ $\quad + \quad + \quad$ $\overline{\pm}$

то замѣтимъ, что $a - b < 180^\circ$ и $C < 180^\circ$

или $\tfrac{1}{2}(a-b) < 90^\circ$ и $\tfrac{1}{2}C < 90^\circ$, а потому

$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a-b)$ и $\text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}C$ суть величины положительныя, слѣдовательно и $\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B)$ съ величиною $\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b)$ должны быть съ одинакими знаками, т. е. если $\tfrac{1}{2}(a+b) \gtreqless 90^\circ$, то соотвѣтственно и $\tfrac{1}{2}(A+B) \gtreqless 180^\circ$, или, что тоже самое, если $a + b \gtreqless 180^\circ$, то соотвѣтственно и $A + B \gtreqless 180^\circ$.

Отсюда новое свойство сферическаго треугольника, состоящее въ томъ, что *если сумма сторонъ болѣе, равна или менѣе* $180^\circ$, *то и сумма угловъ, имъ противолежащихъ, соотвѣтственно болѣе, равна или менѣе* $180^\circ$; т. е. *полусумма сторонъ сф. тр. всегда одинакова съ полусуммою противолежащихъ имъ угловъ.*

Взявъ одну изъ аналогій, выраженныхъ въ синусахъ, (т. е. 1-ю или 3-ю), напр.

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b) : \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}C : \text{Tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B),$$

$+ \quad$ $\overline{\pm}$ $\quad +$ $\quad \overline{\pm}$

получимъ, такъ какъ предыдущіе члены этой пропорціи суть величины положительныя, то и знаки при послѣдующихъ членахъ должны быть одинаки, т. е.

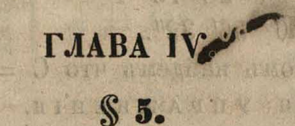
или оба члена съ плюсомъ, или оба съ минусомъ, или оба члена равны нулю. Но какъ абсолютныя величины $\frac{1}{2}$ (a — b) и $\frac{1}{2}$ (A — B) находятся всегда между 0° и 90°, то и a — b съ величиною A — B необходимо одного рода, т. е. или обѣ разности положительныя, или обѣ отрицательныя, или обѣ равны нулю.

Отсюда получаемъ извѣстныя уже свойства:

a) *Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ большей сторонѣ противолежитъ большій уголъ и обратно.*

b) *Равнымъ сторонамъ противолежатъ равные углы и обратно.*

*Примѣч.* Свойства сферическаго треугольника, выведенныя нами изъ изслѣдованія аналогій, могутъ быть также доказаны или по формуламъ Гауса, или независимо, помощію чертежа (Сф. геом., теор. 6 и 7).



# ГЛАВА IV.

## § 5.

## Вычисленіе сферическихъ треугольниковъ.

Рѣшеніе сферическихъ треугольниковъ вообше, какъ мы уже показали, заключается въ слѣдующихъ шести случаяхъ:

### СЛУЧАЙ 1.

*Даны три стороны a, b и c; найти три угла A, B, C.*

*Рѣшеніе.* Одинъ изъ угловъ, напр. A, можетъ быть найденъ помощію уравненія

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b . \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} b . \operatorname{Sin} c};$$

такимъ же образомъ и каждый изъ остальныхъ угловъ; но какъ формула эта нелогариѳмическая, то вычисленіе чаще производится по слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\operatorname{Tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-b) . \operatorname{Sin}(p-c)}{\operatorname{Sin} p . \operatorname{Sin}(p-a)}}, \quad \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} p . \operatorname{Sin}(p-b)}{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} c}},$$

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(p-a) . \operatorname{Sin}(p-b)}{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b}}, \quad \text{гдѣ } p = \tfrac{1}{2}(a + b + c).$$

Впрочемъ вычисленіе по формуламъ тангенсовъ предпочтительнѣе (см. прямол. триг. § 12, т. 9). Здѣсь радикалъ долженъ быть принимаемъ только со знакомъ +, потому что каждый изъ угловъ $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{2}$ B и $\frac{1}{2}$ C менѣе 90° (См. сф. тр. § 4, теор. 5).

Численный примѣръ.

Пусть a = 72° 14′ 26″; b = 110° 18′ 20″; c = 48° 50′ 42″.

*Предварительныя вычисленія.*

p = $\frac{1}{2}$ (a + b + c) = 115° 41′ 44″, p — a = 43° 27′ 18″,
p — b = 5° 23′ 24″, p — c = 66° 51′ 2″.

*Вычисленіе угла A*

по форм. $Tg\,\frac{1}{2}\,A$.

$\log Sin\,(p - b) = 8{,}972825$

$\log Sin\,(p - c) = 9{,}963544$

$lo'g\,Sin\,p = 0{,}045222\text{-}10$

$lo'g\,Sin\,(p - a) = 0{,}162548\text{-}10$

$19{,}144139\text{-}20$

$\log Tg\,\frac{1}{2}\,A = 9{,}572069$

$\frac{1}{2}\,A = 20^{\circ}\,28'\,16''$

$A = 40^{\circ}\,56'\,32''$.

*Вычисленіе угла B*

по форм. $Tg\,\frac{1}{2}\,B$.

$\log Sin\,(p - a) = 9{,}837452$

$\log Sin\,(p - c) = 9{,}963543$

$lo'g\,Sin\,p = 0{,}045222\text{-}10$

$lo'g\,Sin\,(p - b) = 1{,}027175\text{-}10$

$20{,}873392\text{-}20$

$\log Tg\,\frac{1}{2}\,B = 10{,}436696$

$\frac{1}{2}\,B = 69^{\circ}\,54'\,18''$

$B = 139^{\circ}48'36''$.

Такимъ же образомъ найдемъ что $C = 31^{\circ}12'13''$.

Примѣры для упражненія.

1) Данныя: $a = 100^{\circ}, b = 80^{\circ}, c = 60^{\circ}$.

Искомыя: $A = 53^{\circ}\,53'\,29''$, $B = 36^{\circ}\,6'\,31''$, $C = 28^{\circ}\,25'\,54''$.

2) Данныя: $a = 20^{\circ}\,14'\,40''$, $b = 39^{\circ}\,27'12''$, $c = 50^{\circ}\,54'\,42''$.

Искомыя: $A = 23^{\circ}\,46'\,17''$, $B = 47^{\circ}\,45'\,7''$, $C = 115^{\circ}17'15''$.

## СЛУЧАЙ 2.

*Даны три угла A, B, C; найти три стороны a, b, c.*

*Рѣшеніе.* Вычисленіе производится по формуламъ:

$$Sin\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-Cos\,P.\,Cos\,(P-A)}{Sin\,B.\;Sin\,C}}\,,\quad Cos\,\tfrac{1}{2}\,b = \sqrt{\frac{Cos\,(P-A).\,Cos(P-C)}{Sin\,A.\;Sin\,C}}$$

$$Tg\tfrac{1}{2}\,c = \sqrt{\frac{-Cos\,P.\,Cos\,(P-C)}{Cos(P-A).Cos(P-B)}}\,,\ \text{гдѣ}\ P = \tfrac{1}{2}\,(A + B + C).$$

Преимущественно же вычисляютъ по формуламъ тангенсовъ половинныхъ сторонъ.

Примѣръ для упражненія. По даннымъ угламъ: $A = 114^{\circ}\,19'\,40''$, $B = 130^{\circ}\,42'\,45''$, $C = 131^{\circ}\,54'\,37''$ отыскать стороны.

Вычисляя, получимъ: $a = 87^{\circ}\,35'\,20''$, $b = 123^{\circ}\,47'\,10''$, $c = 125^{\circ}\,18'\,52''$.

*Другой способъ для рѣшенія того же случая.* Вычисленіе треугольника по тремъ даннымъ угламъ весьма часто производятъ слѣдующимъ образомъ: данному треугольнику ABC подстроивъ полярный $A'\,B'\,C'$ (черт. 3), помощію данныхъ угловъ A, B, C находятъ стороны $a'$, $b'$, $c'$ послѣдняго треугольника и потомъ вычисляютъ его углы $A'$, $B'$, $C'$. Отыскавъ исполненія угловъ $A'$, $B'$, $C'$, т. е. каждый изъ нихъ вычитая изъ $180^{\circ}$, получимъ искомыя стороны.

Пусть A = 107° 45′ 34″; B = 69° 41′ 40″; C = 131° 9′ 18″. Въ треугольникѣ A′ B′ C′, полярномъ данному, найдемъ

$a' = 180° - A = 72°\ 14'\ 26''$,

$b' = 180° - B = 110°\ 18'\ 20''$,

$c' = 180° - C = 48°\ 50'\ 52''$.

Вычисляя △ A′ B′ C′, (по случаю 1-му), получимъ

| | | |
|---|---|---|
| $A' = 40°\ 56'\ 32''$ | а потому | $a = 180° - A' = 139°\ 3'\ 28''$ |
| $B' = 136°\ 48'\ 36''$ | | $b = 180° - B' = 40°\ 11'\ 14''$ |
| $C' = 31°\ 12'\ 13''$ | | $c = 180° - C' = 148°\ 47'\ 47''$ |

**СЛУЧАЙ 3.**

*Даны двѣ стороны a, b и уголъ C между ними: вычислить прочія части.*

*Рѣшеніе.* 1. Углы A и B вычисляются по слѣдующимъ формуламъ:

$$\mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}(A - B) = \mathrm{Cotg}\ \tfrac{1}{2} C.\frac{\mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(a - b)}{\mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(a + b)},$$

$$\mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}(A + B) = \mathrm{Cotg}\ \tfrac{1}{2} C.\frac{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(a - b)}{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(a + b)}.$$ Откуда

$$A = \tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B);\ B = \tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B).$$

2. Зная уголъ A, найдемъ остальную сторону по пропорціи

$$\mathrm{Sin}\ c : \mathrm{Sin}\ C = \mathrm{Sin}\ a : \mathrm{Sin}\ A;$$

или если извѣстны A и B, то по аналогіи Непера,

$$\mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2} c = \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}(a + b)\frac{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(A + B)}{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(A - B)};$$

или по формулѣ Гауса,

$$\mathrm{Cos}\ \tfrac{1}{2} c = \mathrm{Sin}\ \tfrac{1}{2} C\frac{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(a + b)}{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(A + B)}.\ (*)$$

Другіе пріемы для рѣшенія этого случая см. въ примѣчаніяхъ.

Числен. примѣръ. Пусть a = 96°, b = 80°, C = 100°.

*Предварительныя вычисленія.* $\frac{1}{2}(a + b) = 88°$, $\frac{1}{2}(a - b) = 8°$, $\frac{1}{2} C = 50°$.

---

(*) Въ подобныхъ случаяхъ выгоднѣе вычислять по формулѣ Гауса, потому что lg ½ Cos (a + b) уже извѣстенъ, или по аналог. Непера; производя же вычисленіе по формулѣ синусовъ, можемъ, для стороны c, получить двойственное рѣшеніе.

*Вычисленіе* $\frac{1}{2}(A - B)$;

$\lg \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a - b) = 9{,}143555$

$\lg \operatorname{Cotg} \frac{1}{2} C = 9{,}923814$

$\lg' \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a + b) = 0{,}000265$

$\lg \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(A - B) = 9{,}067634$

$\frac{1}{2}(A - B) = 6^\circ 39' 53'',5$

$A = 94^\circ 15' 35''$

*Вычисленіе* $\frac{1}{2}(A + B)$;

$\lg \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a - b) = 9{,}995753$

$\lg \operatorname{Cotg} \frac{1}{2} C = 9{,}923814$

$\lg \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a + b) = 1{,}457181$

$\lg \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(A + B) = 11{,}376748$

$\frac{1}{2}(A + B) = 87^\circ 35' 41'',5$

$B = 80^\circ\ 55'\ 48''$

*Вычисленіе стороны с,*

по формулѣ синусовъ.

$\lg \operatorname{Sin} C = 9{,}993351$

$\lg \operatorname{Sin} a = 9{,}997614$

$\lg' \operatorname{Sin} A = 0{,}001202$

$\lg \operatorname{Sin} c = 9{,}992167$

$= (79^\circ\ 9'\ 3'') = 100^\circ 50' 57''$,

такъ какъ $C > A$, то и $c > a$.

по аналог. Непера.

$\lg \operatorname{Tg} \frac{1}{2}(a + b) = 11{,}456916$

$\lg \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(A + B) = 8{,}622870$

$\lg' \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(A - B) = 0{,}002945$

$\lg \operatorname{Tg} \frac{1}{2} c = 10{,}082731$

$\frac{1}{2} c = 50^\circ 25' 28'',5$

$c = 100^\circ 50' 57''$.

*Примѣч.* 1. Въ геодезіи и въ астрономіи требуется иногда отыскать сторону с, не опредѣляя угловъ A и B; въ такомъ случаѣ вычисленіе можетъ быть произведено по формулѣ $\operatorname{Cos} c = \operatorname{Cos} a . \operatorname{Cos} b + \operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b . \operatorname{Cos} C$.

*Вычисленіе помощію логариѳмовъ тригонометрич. линій и логариѳмовъ чиселъ.*

$\lg \operatorname{Cos} a = 9{,}019235\ (n)$

$\lg \operatorname{Cos} b = 9{,}239670$

$\lg \operatorname{Cos} a . \operatorname{Cos} b = 8{,}258905\ (n)$

$\operatorname{Cos} a . \operatorname{Cos} b = -0{,}0181512$

$\lg \operatorname{Sin} a = 9{,}997614$

$\lg \operatorname{Sin} b = 9{,}993352$

$\lg \operatorname{Cos} C = 9{,}239670\ (n)$

$9{,}230636\ (n)$

$\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} C = -0{,}1700733$

$\operatorname{Cos} a . \operatorname{Cos} b = -0{,}0181512$

$(n)\ 9{,}274676 \backsim \lg -0{,}1882245$

$9{,}274676 = \lg \operatorname{Cos} 79^\circ\ 9'\ 3''$

$c = 180^\circ - 79^\circ\ 9'\ 3'' = 100^\circ\ 50'\ 57''$.

*Вычисленіе помощію гаусовыхъ логариѳмовъ суммъ и разностей.*

Положивъ $\operatorname{Cos} a . \operatorname{Cos} b = p$,

а $\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b . \operatorname{Cos} C = p$,

получимъ $\operatorname{Cos} c = p + q$.

Уже найдено, что

$\lg q = 9{,}230636\ (n)$
$\lg p = 8{,}258905\ (n)$ } вычитая,

получ. $\log \frac{q}{p} = 0.971731$

Отыскивая по табл. A, находимъ

$\log \left(\frac{q + p}{p}\right) = 0{,}044040$

$\log q = 9{,}230639\ (n)$

$\log (p + q) = 9{,}274676\ (n)$

что и было найдено для Cos c

2. Уголъ A, противолежащій одной изъ данныхъ сторонъ, можетъ также быть найденъ по нелогариѳмической формулѣ

$$\operatorname{Cotg} A . \operatorname{Sin} C = \operatorname{Cotg} a . \operatorname{Sin} b - \operatorname{Cos} C . \operatorname{Cos} b,$$

$$\operatorname{Cotg} A = \frac{\operatorname{Cotg} a . \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} C} - \operatorname{Cotg} C . \operatorname{Cos} b.$$

$a = 96^\circ$; $b = 80^\circ$; $C = 100^\circ$.

$\lg \operatorname{Cotg} a = 9{,}021620\ (n)$

$\lg \operatorname{Sin} b = 9{,}993352$

$\lg \frac{1}{\operatorname{Sin} C} = 0{,}006648$

$-0{,}105104 \backsim 9{,}021620\ (n)$

$\lg \operatorname{Cotg} C = 9{,}246319\ (n)$

$\lg \operatorname{Cos} b = 9{,}239670$

$-0{,}030619 \backsim 8{,}485989\ (n)$

$-0{,}105104$

$+0{,}030619$

$\lg -0{,}074485 = 8{,}872071\ (n)$

$\lg \text{Cotg}\ 85^\circ 44' 25'' = 8{,}872071$, слѣд.

$A = 180^\circ - 85^\circ\ 44'\ 25'' = 94^\circ\ 15'\ 35''$.

3. Вычисленіе той же формулы помощію гаусовыхъ таблицъ.

$$\left.\begin{aligned} \lg \frac{\text{Cotg a. Sin b}}{\text{Sin C}} &= 9{,}021620\ (n) \\ \lg \text{Cotg C. Cos b} &= 8{,}485989\ (n) \end{aligned}\right\}$$ Вычитая и отыскивая по табл. C, получимъ

$0{,}535631 =\quad 0{,}149549$

$\qquad\qquad\qquad 9{,}021620$

$\lg \text{Cotg}\ 85^\circ\ 44'\ 25'' \ \backsim\ 8{,}872071$ (*)

Производя вычисленія для c и A по сокращен. гаусов. таблицамъ

| Веги, съ 5-ю дес. знак получ. *для стор. с.* | По табл. Köhler (La Lande) *для угла А.* |
|---|---|
| $\lg \text{Cos a. Cos b} = 8{,}25891\ (n)$ | $\lg \frac{\text{Cotg a. Sin b}}{\text{Sin C}} = 9{,}02162$ |
| $\lg \text{Sin a. Sin b. Cos C} = 9{,}23064\ (n)$ | $\lg \text{Cotg C. Cos b} = 8{,}48599\ (n)$ |
| $0{,}04403\ \backsim\ 0{,}97173$ | $0{,}14955\ \backsim\ 0{,}53563$ |
| $9{,}23064\ (n)$ | $9{,}02162\ (n)$ |
| $9{,}27467\ (n)$ (см. выш. прим. 1). | $8{,}87207\ (n)$ (см. выш. прим. 2 и 3). |

4. Производя вычисленіе 2-го случая помощію вспомогательныхъ угловъ, или, что то же самое, помощію отсѣковъ сторонъ и угловъ треугольника, получимъ для с.

$$\text{Cos c} = \text{Cos a. Cos b} + \text{Sin a. Sin b Cos C}.$$

Разлагая данную формулу, помощію вспомогательнаго угла $\varphi$ на двѣ логариѳмическія, или, вычисляя по прямоугольнымъ треугольникамъ CBD и ABD, получимъ

$$\text{Tg}\ \varphi = \text{Tg a. Cos C (черт. 6, № 1)}$$
$$+ \quad - \quad -$$
$$\text{Cos c} = \frac{\text{Cos a}}{\text{Cos}\ \varphi}.\ \text{Cos}\ (b - \varphi).$$

Положивъ $a = 96^\circ$; $b = 80^\circ$; $C = 100^\circ$, и вычисляя, получимъ

| | Вычисленіе стороны c. |
|---|---|
| $\lg \text{Tg a} = 10{,}978380$ | $\lg \text{Cos a} = 9{,}019235\ (n)$ |
| $\lg \text{Cos C} = 9{,}239670$ | $\lg' \text{Cos}\ \varphi = 0{,}285830$ |
| $\lg \text{Tg}\ \varphi = 10{,}218050$ | $\lg \text{Cos}\ (b - \varphi) = 9{,}969610$ |
| $\varphi = 58^\circ\ 48'\ 53''$. | $\lg \text{Cos c} = 9{,}274675\ (n)$ |
| | слѣд. $c = 180^\circ - 79^\circ\ 9'\ 4'' = 100^\circ\ 50'\ 57''$. |

*Примѣч.* Понятно, что задача эта всегда даетъ только одно рѣшеніе.

## СЛУЧАЙ 4.

*По даннымъ двумъ угламъ A, B и сторонѣ c, къ нимъ прилежащей, вычислить прочія части.*

*Рѣшеніе.* 1. Стороны a и b найдутся помощію неперовыхъ аналогій

(*) Вычисленія произведены по таблицамъ Цеха (Zech's Taf. der Addit. u. Substr. Log.) Предлагаемъ эти же вычисленія произвести по мореходнымъ таблицамъ, изд. Морскимъ кадетскимъ корпусомъ. См. табл. 53, логар. Гауса, для вычисленія суммъ и разностей.

$$\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(a+b)=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(a-b)=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)},$$

откуда $a=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$; $b=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$.

2. Зная стороны a, или b, найдемъ уг. C.

$$\operatorname{Sin}C=\frac{\operatorname{Sin}c.\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Sin}a}=\frac{\operatorname{Sin}c.\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}b};$$

но какъ формула эта можетъ дать двойное рѣшеніе, то лучше вычислять по аналогіи Непера

$$\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}C=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(A+B)\ (*).$$

Если, наконецъ, желали бы опредѣлить уг. C, независимо отъ сторонъ b и c, то производятъ вычисленіе по формулѣ: $\operatorname{Cos}C=\operatorname{Sin}A.\operatorname{Sin}B.\operatorname{Cos}c-\operatorname{Cos}A.\operatorname{Cos}B$, разлагая ее, помощію вспомогательнаго угла, на двѣ логариѳмическія.

*Примѣч.* Понятно, что при заданіи этомъ всегда получается только одно рѣшеніе, которое помощію полярнаго треугольника, можетъ быть приведено къ рѣшенію по случаю 3-му.

### СЛУЧАЙ 5.

*Даны двѣ стороны a, b и уг. A, противолежащій одной изъ нихъ: найти прочія части.*

*Рѣшеніе.* 1. Уголъ B найдется изъ формулы

$$\operatorname{Sin}B=\frac{\operatorname{Sin}b.\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Sin}a}.$$

2. Уголъ C найдемъ изъ уравненія

$$\operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}C=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(A+B).\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(A-B)\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

3 Наконецъ сторону c получимъ изъ формулы

$$\operatorname{Sin}c=\frac{\operatorname{Sin}C.\operatorname{Sin}a}{\operatorname{Sin}A},$$

лучше же опредѣлять ее помощію уравненія

$$\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}c=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(a+b).\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}=\operatorname{Tg}\tfrac{1}{2}(a-b)\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

---

(*) Уголъ C можетъ еще короче быть вычисленъ по формулѣ Гауса (см. зад. 3-го случ).

## РАЗБОРЪ СОМНИТЕЛЬНЫХЪ СЛУЧАЕВЪ.

Вычисляя уголъ B по формулѣ синусовъ, вообще можемъ получить слѣдующіе редультаты: $\sin B = 1$, $\sin B < 1$ и $\sin B > 1$ или, что тоже, $\lg \sin B = 10$, $\lg \sin B < 10$ и $\lg \sin B > 10$.

1. По первому изъ этихъ результатовъ заключаемъ, что данный треугольникъ есть прямоугольный при B, и слѣдоват. имѣетъ только одно рѣшеніе.

2. При второмъ заключаемъ, что треугольникъ не возможенъ.

3. Наконецъ при послѣднемъ изъ этихъ случаевъ находимъ, что B имѣетъ два значенія, дополняющія другъ друга до 180°. Что бы узнать, которая изъ этихъ величинъ дѣйствительно удовлетворяетъ рѣшенію, надо руководствоваться извѣстными правилами:

a) Большей сторонѣ противолежитъ и большій уголъ, а равнымъ сторонамъ противолежатъ равные углы.

b) Если сумма двухъ сторонъ менѣе 180°, то и сумма угловъ, имъ противолежащихъ, также менѣе 180°; слѣдовательно, при такомъ заданіи, уголъ противолежащій меньшей сторонѣ есть острый.

c) Если сумма двухъ данныхъ сторонъ болѣе 180°, то и сумма противолежащихъ имъ угловъ болѣе 180°; слѣдовательно, при такомъ заданіи, уголъ противолежащій большей сторонѣ есть тупой.

d) Если сумма двухъ данныхъ сторонъ равна 180°, то и сумма противолежащихъ имъ угловъ равна 180°.

Во всѣхъ прочихъ случаяхъ уголъ B можетъ имѣть два значенія, а слѣдовательно получатся два треугольника, удовлетворяющіе требованію (*); третій же уголъ $C_{\prime}$ или $C_{\prime\prime}$, и третья сторона $c_{\prime}$ или $c_{\prime\prime}$, для каждаго изъ этихъ треугольниковъ должны быть вычисляемы особо.

Численн. прим. 1. Пусть $a = 80°$; $b = 60°$; $A = 40°$.

Вычисляя уголъ B, получимъ $\log \sin B = 9,752246$.

Предварительныя вычисленія для отысканія остальныхъ величинъ.

| | |
|---|---|
| $a + b < 180°$, слѣ. и $A + B < 180°$; | $\frac{1}{2}(A + B) = 37° 12' 36''$; |
| притомъ $a > b$, слѣд. $A > B$, | $\frac{1}{2}(A - B) = 2° 47' 24''$; |
| а потому $B < 90°$ | $\frac{1}{2}(a + b) = 70°$; |
| $B = 34°25'13''$. | $\frac{1}{2}(a - b) = 10°$. |

(*) Слѣдоват. двойственныя рѣшенія могутъ получиться только при слѣдующихъ условіяхъ: $a + b < 180°$, $a < b$, $A < 90°$, или при $a + b > 180°$, $a > b$, $A > 90°$.

Вычисленіе угла C.

$\lg \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(a+b) = 9{,}534052$
$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}(A+B) = 9{,}880425$
$\lg' \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(a-b) = 0{,}006648$

$\lg \mathrm{Cotg}\ \frac{1}{2}C = 9{,}421125$
$\frac{1}{2}C = 75^{\circ}13'37''$
$C = 150^{\circ}27'14''$

Вычисленіе стор. c.

$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}(a-b) = 9{,}246319$
$\mathrm{Tg}\ \mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A+B) = 9{,}781568$
$\lg' \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(A-B) = 1{,}312705$

$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}c = 10{,}340592$
$\frac{1}{2}c = 65^{\circ}27'54''$
$c = 130^{\circ}55'48''$.

**Примѣръ 2.** Пусть $a = 20^{\circ}16'38''$; $b=56^{\circ}19'40''$; $A=20^{\circ}9'55''$.

*Вычисленіе угла B.*

$\lg \mathrm{Sin}\ b = 9{,}920240$
$\lg \mathrm{Sin}\ A = 9{,}537476$
$\lg' \mathrm{Sin}\ a = 0{,}460218$

$\lg \mathrm{Sin}\ B = 9{,}917934$
$B_{\prime} = 55^{\circ}52'30''$ } два
$B_{\prime\prime} = 124^{\circ}7'30''$ } рѣш.
$a+b < 180^{\circ}$; $A+B < 180^{\circ}$.

Предварит. вычисленія для отысканія прочихъ частей.

$\frac{1}{2}(b+a) = 38^{\circ}\ 18'\ 9''$
$\frac{1}{2}(b-a) = 18^{\circ}\ 1'\ 31''$

$\frac{1}{2}(B_{\prime}+A) = 38^{\circ}\ 1'\ 12''$
$\frac{1}{2}(B_{\prime}-A) = 17^{\circ}\ 51'\ 18''$
$\frac{1}{2}(B_{\prime\prime}+A) = 72^{\circ}\ 8'\ 42'',5$
$\frac{1}{2}(B_{\prime\prime}-A) = 51^{\circ}\ 58'\ 48''$.

*Вычисленіе угла $C_{\prime}$*

$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}(B_{\prime}-A) = 10{,}106879$
$\lg \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(b+a) = 9{,}792261$
$\lg' \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(b-a) = 0{,}509428$

$\lg \mathrm{Cotg}\ \frac{1}{2}C_{\prime} = 10{,}408565$
$\frac{1}{2}C_{\prime} = 21^{\circ}19'20''$
$C_{\prime} = 42^{\circ}38'40''$.

*Вычисленіе угла $C_{\prime\prime}$*

$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}(B_{\prime\prime}-A) = 9{,}508022$
$\lg \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(b+a) = 9{,}792261$
$\lg' \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(b-a) = 0{,}509429$

$\lg \mathrm{Cotg}\ \frac{1}{2}C_{\prime\prime} = 9{,}809712$
$\frac{1}{2}C_{\prime\prime} = 57^{\circ}10'8''$
$C_{\prime\prime} = 114^{\circ}20'16''$.

*Вычисленіе стор. $c_{\prime}$*

$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}(b+a) = 9{,}897530$
$\lg \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(B_{\prime}+A) = 9{,}896413$
$\lg' \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(B_{\prime}-A) = 0{,}021438$

$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}c_{\prime} = 10{,}815381$
$\frac{1}{2}c_{\prime} = 33^{\circ}10'22''$
$c_{\prime} = 66^{\circ}20'44''$

*Вычисленіе стор. $c_{\prime\prime}$*

$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}(b+a) = 9{,}897530$
$\lg \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(B_{\prime\prime}+A) = 9{,}486586$
$\lg' \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(B_{\prime\prime}-A) = 0{,}210464$

$\lg \mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}c_{\prime\prime} = 9{,}594580$
$\frac{1}{2}c_{\prime\prime} = 21^{\circ}27'48''$
$c_{\prime\prime} = 42^{\circ}55'36''$.

Располагая искомыя по треугольникамъ, получимъ

для $\triangle\ A\ B_{\prime}\ C$

$B_{\prime} = 55^{\circ}52'30''$
$C_{\prime\prime} = 114^{\circ}20'16''$
$c_{\prime\prime} = 66^{\circ}20'44''$

для $\triangle\ A\ B_{\prime\prime}\ C$

$B_{\prime\prime} = 124^{\circ}7'30''$
$C_{\prime} = 42^{\circ}38'40''$
$c_{\prime} = 42^{\circ}55'36''$,

потому что бо̀льшему углу $C_{\prime\prime}$ должна противолежать и бо̀льшая сторона $c_{\prime\prime}$ (черт. 21) и притомъ углы $A$ и $B_{\prime}$, прилежащіе большей сторонѣ $c_{\prime\prime}$, должны быть однородны, а углы $A$ и $B_{\prime\prime}$, прилежащіе меньшей сторонѣ $c_{\prime}$, разнородны. Выборъ этихъ

величинъ основанъ на томъ, что если высота падаетъ внутри треугольника, то углы, основанію прилежащіе, *однородны*, а въ противномъ случаѣ *разнородны*.

*Примѣч.* Если вычисленіе угловъ $C_{\prime}$ и $C_{\prime\prime}$ производить по аналогіи въ косинусахъ полусуммы и полуразности сторонъ, то искомыя величины $C_{\prime}$ и $C_{\prime\prime}$ получаются, безъ перестановки, прямо соотвѣтственно по треугольникамъ.

*Примѣръ* 3. Пусть $a = 30^\circ\ 5'$; $b = 70^\circ\ 9'$; $A = 40^\circ\ 7'$.

Вычисляя B по формулѣ $\text{Sin}\ B = \frac{\text{Sin}\ b.\ \text{Sin}\ A}{\text{Sin}\ a}$, получимъ

$\text{Sin}\ b.\ \text{Sin}\ A > \text{Sin}\ a$, слѣд. $\text{Sin}\ B > 1$, а потому треугольникъ невозможенъ.

ПРИМѢРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

| Данныя | Рѣшеніе 1-ое | Рѣшеніе 2-ое |
|---|---|---|
| $a = 31^\circ\ 2'$ | $B_{\prime} = 26^\circ\ 49'\ 38''$ | $B_{\prime\prime} = 153^\circ\ 10'\ 22''$ |
| $b = 40^\circ\ 7'$ | $C_{\prime} = 140^\circ\ 4'\ 35''$ | $C_{\prime\prime} = 6^\circ\ 56'\ 5''$ |
| $A = 21^\circ\ 10'$ | $c_{\prime} = 66^\circ\ 23'\ 21''$ | $c_{\prime\prime} = 9^\circ\ 55'\ 36''$ |
| $a = 113^\circ\ 2'\ 57''$ | $B_{\prime} = 75^\circ\ 0'\ 51''$ | $B_{\prime\prime} = 104^\circ\ 59'\ 8''$ |
| $b = 82^\circ\ 39'\ 28''$ | $C_{\prime} = 70^\circ\ 6'\ 59''$ | $C_{\prime\prime} = 138^\circ\ 50'\ 14''$ |
| $A = 116^\circ\ 20'\ 2''$ | $c_{\prime} = 74^\circ\ 54'\ 31''$ | $c_{\prime\prime} = 137^\circ\ 29'\ 5''$. |

### СЛУЧАЙ 6.

*Даны два угла A, B и сторона (a), противолежащая одному изъ нихъ: вычислить прочія части.*

*Рѣш.* 1. Сторона b найдется по уравненію

$$\text{Sin}\ b = \frac{\text{Sin}\ a.\ \text{Sin}\ B}{\text{Sin}\ A}.$$

2. Сторону c получаемъ изъ формулы

$$\text{Tg}\ \tfrac{1}{2}\ c = \text{Tg}\ \tfrac{1}{2}(a + b)\frac{\text{Cos}\ \frac{1}{2}(A + B)}{\text{Cos}\ \frac{1}{2}(A - B)} = \text{Tg}\ \tfrac{1}{2}(a - b)\ \frac{\text{Sin}\ \frac{1}{2}(A + B)}{\text{Sin}\ \frac{1}{2}(A - B)}.$$

3. Уголъ C можетъ быть вычисленъ по уравненіямъ

$$\text{Cotg}\ \tfrac{1}{2}\ C = \text{Tg}\ \tfrac{1}{2}(A + B)\frac{\text{Cos}\ \frac{1}{2}(a + b)}{\text{Cos}\ \frac{1}{2}(a - b)} = \text{Tg}\ \tfrac{1}{2}(A - B)\frac{\text{Sin}\ \frac{1}{2}(a + b)}{\text{Sin}\ \frac{1}{2}(a - b)}.$$

*Разборъ сомнительныхъ случаевъ.*

Вычисляя сторону b по формулѣ синусовъ, и здѣсь, какъ въ случаѣ 5-мъ, получимъ для b два значенія, дополняющія другъ друга до 180°. Но какъ большему углу противолежитъ большая сторона, то при $B + A < 180^\circ$ и $b + a < 180^\circ$; если же притомъ $a > 90^\circ$, то $b < 90^\circ$.

Когда $B + A > 180^\circ$, и $a > 90^\circ$, то $b \gtrless 90^\circ$, и наконецъ,

когда B + A = 180°, то b должно удовлетворять равенству b + a = 180°.

Вообще рѣшеніе этого случая, помощію треугольника ему полярнаго, можетъ быть приведено къ рѣшенію задачъ, изложенныхъ въ случаѣ 5-мъ, поэтому и здѣсь треугольникъ можетъ иногда быть *невозможенъ*, или имѣть *два* рѣшенія. (*)

*Численный примѣръ.* Даны: a = 44° 55′5″; B = 152° 3′10″; A = 100° 2′4″. Вычислить прочія части b, c, C.

Производя вычисленіе по предложеннымъ формуламъ, получимъ, что вычисляемый треугольникъ имѣетъ *одно рѣшеніе*, потому что B + A > 180°, слѣд b + a > 180°; но a < 90°, слѣд. b > 90°, откуда b = 160° 21′ 47″.

Для прочихъ частей находимъ: c = 142° 10′ 56″
C = 169° 21′ 35″.

### Примѣры для упражненій.

1. Данныя : A = 44°10′41″; B = 33°22′45″; a = 54°54′32″.
Иском. : b = 37°47′18″; c = 74°51′50″; C = 119°55′6″.
2. Данныя : A = 71°26′19″; B = 52°33′46″; b = 56°23′42″.
Иском. { a = 83°55′; C = 113°21′49″; c = 105°39′3″;
$a_{,}$ = 96°5′; $C_{,}$ = 129°7′32″; $c_{,}$ = 125°32′20″.

### Общее примѣчаніе ко всѣмъ шести случаямъ.

Разсматривая рѣшенныя нами задачи, находимъ, что главными случаями могутъ быть названы: 1-ый, 3-ій и 5-й; остальные же три: 2-ой, 4-й и 6-й, помощію полярныхъ треугольниковъ, могутъ быть приведены къ рѣшенію первыхъ.

### Частные случаи рѣшенія косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

*Задача 1. Если въ треугольникѣ* ABC (черт. 18) *даны двѣ стороны b, c, которыхъ сумма b + c = 180*, то такой треугольникъ можетъ быть рѣшенъ помощію треугольника равнобедреннаго или прямоугольнаго.

Пусть даны a, b, c; b + c = 180°, то и B + C = 180°.

Продолживъ стороны a, c до взаимнаго ихъ пересѣченія въ точкѣ B′ (черт. 18) получимъ равнобедренный треугольникъ AB′C, въ которомъ ∠ ACB′ = ∠ AB′C, и AC = AB′; а проведя дугу

(*) Двойственность рѣшенія можетъ быть только при условіяхъ: A + B < 180°, A < B, a < 90°, A + B > 180°, A > B, a > 90°. Если же Sin A < Sin a. Sin B, то треугольникъ невозможенъ.

б. кр. $AD \perp B'C$, получимъ равные прямоугольные треугольники ADC и ADB'.

Рѣшая одинъ изъ этихъ прямоугольныхъ треугольниковъ, напр. $\triangle$ ACD, по даннымъ $AC = b$ и $CD = 90^\circ - \frac{a}{2}$, найдемъ $\angle CAD = 90^\circ - \frac{1}{2}A$, и $\angle ACD = B$, слѣдовательно получимъ части треугольника равнобедреннаго, по которымъ найдемъ неизвѣстныя части даннаго треугольника. Можно также по формуламъ

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}A = \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a : \text{Sin}\,b\,; \quad \text{Cos}\,B = \text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}a\,.\,\text{Cotg}\,b,$$

непосредственно получить искомыя части.

*Примѣры для упражненій.*

1. Даны: A, b, c; $b + c = 180^\circ$. Искомыя a, B. наход. по форм.

$$\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}a = \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}A.\ \text{Sin}\,b,$$
$$\text{Cotg}\,B = \text{Cos}\,b\,.\ \text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}A.$$

2. Даны: B, b, c; $b + c = 180^\circ$. Искомыя A, a. наход. по форм.

$$\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}A = \text{Cos}\,b.\ \text{Tg}\,B,$$
$$\text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}a = \text{Cos}\,B.\ \text{Tg}\,b.$$

*Задача 2. Вычислить треугольникъ, въ которомъ сумма двухъ данныхъ угловъ равна 180°.*

Вычисленіе производится по предыдущей задачѣ, потому что если $A + B = 180^\circ$, то и $a + b = 180^\circ$.

1. Пусть въ треугольникѣ ABC (черт. 18) даны a, B, C; притомъ $B + C = 180^\circ$. Сдѣлавъ тоже построеніе какъ и въ предыдущей задачѣ получимъ равнобедренный $\triangle$ ACB', который перпендикуляромъ AD разсѣчется на два равныхъ прямоугольныхъ треугольника ADC, ADB'. Вычисляя части одного изъ прямоугольныхъ треугольниковъ можемъ получить неизвѣстныя части даннаго треугольника.

*Примѣры.* Даны a, B, C; $B + C = 180^\circ$. Искомыя A, b найдутся по формуламъ.

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A = \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}a.\ \text{Sin}\,B; \qquad \text{Cotg}\,b = \text{Tg}\,\tfrac{1}{2}a.\ \text{Cos}\,B.$$

2. Даны: b, B, C; $B + C = 180^\circ$. Искомыя A, a, найд. по форм.

$$\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}A = \text{Cos}\,b.\ \text{Tg}\,B,$$
$$\text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}a = \text{Cos}\,B.\ \text{Tg}\,b.$$

3 Даны: A, B C; B, $+ C = 180^\circ$. Искомыя a и b находимъ по форм.

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}a = \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}A : \text{Sin}\,B,$$
$$\text{Cos}\,b = \text{Cotg}\,B.\ \text{Tg}\,\tfrac{1}{2}A.$$

### Численный примѣръ. (къ зад. 1).

Данныя: $c = 161^\circ 13' 5{,}3''$; $b = 18^\circ 46' 54{,}7''$; $B = 36^\circ 12' 10''$.
Иском. $C = 143^\circ 47' 50''$; $A = 69^\circ 26' 34{,}8''$; $a = 149^\circ 18' 34{,}6''$.

Эти же величины могутъ служить для составленія численнаго примѣра и на вторую задачу: наприм. рѣшить треугольникъ по даннымъ C, B и a?

## § 6.

## Разборъ сомнительныхъ случаевъ при рѣшенiи сф. треугольниковъ.

### 1. Изслѣдованiе помощiю чертежа.

При рѣшенiи задачъ, относящихся къ двумъ послѣднимъ случаямъ (случаи 5 и 6), мы видѣли, что если искомая величина опредѣляется помощiю ея синуса, то вопросу иногда могутъ удовлетворять *двѣ* величины, потому что тотъ же синусъ можетъ соотвѣтствовать двумъ исполнительнымъ угламъ, острому и тупому; или *одно* только рѣшенiе, при синусѣ равномъ 1; или *ни одного,* при синусѣ большемъ 1.

Такiе случаи называются *сомнительными*, и вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить чертежемъ: 1. Въ которыхъ случаяхъ двойственность рѣшенiя находится въ самой сущности вопроса, и когда она есть только кажущаяся. 2. Когда вопросъ совершенно невозможенъ и 3. Если вопросъ дѣйствительно имѣетъ двойственное рѣшенiе, то какъ сочетать между собою найденныя шесть искомыхъ величинъ?

Если на поверхности шара возьмемъ дугу большаго круга BDB′D′, (черт. 22) и изъ какой либо точки C проведемъ окружность большаго круга DCD′ перпендикулярно къ окружности BDB′D′, и нѣсколько дугъ наклонныхъ CB,CB′,CH, то помощiю геометрическихъ построенiй нетрудно доказать, что:

1) Перпендикулярная дуга CD, меньшая 90°, есть наименьшая, а дуга CD′ есть наибольшая изъ всѣхъ дугъ большаго круга, которыя можно провести между данною точкою C и первоначальною окружностiю BDB′D′.

2) Дуги CB, CB′, равно удаленныя отъ основанiя перпендикуляра, равны.

3) Изъ двухъ дугъ CH, CB б. круга, идущихъ къ начальному кругу отъ какой либо точки C, при перпендикулярѣ CD, меньшемъ 90°, та дуга *больше*, которая болѣе удалена отъ основанiя перпендикуляра; а при дугѣ CD′, большей 90°, та *меньше*, которая болѣе удалена отъ основанiя перпендикуляра, т. е. $CD' > CH > CB > CD$; слѣд. косвенныя дуги увеличиваются при постепенномъ удаленiи ихъ отъ CD къ $CD' = 180° - CD$.

Пусть, при рѣшенiи задачи случая 5-го, дано $A < 90°$, $b < 90°$.

На сторонѣ AC даннаго сф. угла A отложивъ $AC = b$ и, проведя къ $AB''A'$ перпендикулярную б. кр. дугу $CD = h$, получимъ прямоугольный $\triangle ACD$, въ которомъ (по прав. Неп.) $\sin h = \sin b \sin A$ (черт. 23, № 1).

Но какъ $CD = h$ есть наименьшая дуга, то сторона (a) можетъ имѣть различныя величины; притомъ, чтобы треугольникъ былъ возможенъ, необходимо, чтобы было $a > h$, что и составляетъ первое условіе возможности заданія при $A < 90^\circ$.

По этому I, при $A < 90^\circ$, если 1) $a < b$ и при $b < 90^\circ$ — два рѣшен: $\triangle ACB_{II}$, $ACB_{II}$; при $a = CD$, одно рѣш. $ACD$.

2. Если $a = b$, одно рѣшеніе, $\triangle ACB_{III}$

3. $a > b$, при этомъ могутъ быть:

| | | |
|---|---|---|
| $a + b < 180^\circ$ | $a < 180^\circ - b$ | одно рѣш. $\triangle ACB_{IV}$, |
| $a + b = 180^\circ$ | $a = 180^\circ - b$ | ни одного ($\smile B_V$), |
| $a + b > 180^\circ$ | $a > 180^\circ - b$ | ни одного ($\smile B_{VI}$). |

II. $A < 90^\circ$, $b > 90^\circ$, притомъ $a > h$. (черт. 23, № 2)

1) $a < b$: $a + b < 180^\circ$, $a < 180^\circ - b$, два рѣш.
$a + b = 180^\circ$, $a = 180^\circ - b$, одно рѣш.
$a + b > 180^\circ$, $a > 180^\circ - b$, одно рѣш.

2) $a = b$ | ни одного рѣшенія,

3) $a > b$ | заданіе не возможно.

*Примѣч.* При $b = 90$.

$a < b$, два рѣш.; $a > b$, $a = b$ ни одного.

III. $A > 90^\circ$, $b < 90^\circ$; $h' = CD'$, наибольш.
$a < h'$ (черт. 23, № 3)

1) $a < b$, невозможн.

2) $a = b$, невозможн.

3) $a > b$: $a + b < 180^\circ$, $a < 180^\circ - b$, одно рѣш.
$a + b = 180^\circ$, $a = 180^\circ - b$, одно рѣш.
$a + b > 180^\circ$, $a > 180^\circ - b$, два рѣш.

IV. $A > 90^\circ$, $b > 90^\circ$; $h' = CD'$, наибольш.
$a < h'$ (черт. 23, № 4).

1) $a < b$: $a + b < 180^\circ$, $a < 180^\circ - b$ невозм.
$a + b = 180^\circ$, $a = 180^\circ - b$ невозм.
$a + b > 180^\circ$, $a > 180^\circ - b$ одно рѣш.

2) $a = b$, одно рѣшеніе

3) $a > b$, два рѣшенія.

*Примѣч.* При $b = 90^\circ$.

$a > b$, два рѣш; $a < b$, ни одн.; $a = b$, ни одн.

*Примѣч.* 1. Случаи, получаемые при $A = 90^\circ$, были уже изслѣдованы при рѣшеніи прямоугольныхъ сф. треугольниковъ.

*Примѣч.* 2. *Основное уравненіе.* При всѣхъ случаяхъ необходимо, чтобы было $\sin a > \sin b$, поэтому, *для возможности заданія*, величина (a) должна находится между b и 180 — b, дуга же b одинакова съ угломъ A.

Дѣйствительная *двойственность* рѣшенія существуетъ только тогда, когда a менѣе b и ея исполненія, при A остромъ (I, II), или когда a болѣе b и ея исполненія, при A тупомъ (IV, III). Наконецъ, въ дѣйствительно двойственномъ рѣшеніи, касательно выбора соотвѣтственныхъ частей изъ шести отысканныхъ, необходимо замѣтить, что большій уголъ C, содержимый между двумя данными сторонами, заключаетъ въ себѣ и перпендикуляръ CD, или CD′, а отсюда видно, что въ этихъ случаяхъ *большее C должно сочетаться съ большимъ c, и съ тѣмъ B, которое однородно съ A*; откуда второе сочетаніе выходитъ само собою.

*Примѣч.* 3. Черезъ разсматриваніе свойствъ треугольника полярнаго данному, по предложенному нами изслѣдованію 5–го случая, можно составить подобную же таблицу и для всѣхъ различныхъ заданій 6–го случая. Для этого нужно только замѣнить A величиною 180° — a и обратно, вмѣсто a подставить 180°—A; или, что одно и тоже, вмѣсто A, a, b подставить a, A, B и обратить знаки $<$ и $>$.

По этому, не входя въ дальнѣйшія подробности, мы прямо заключаемъ, что разсматриваемый нами случай:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Допускаетъ одно рѣшеніе | $a > 90°$ | $B > 90°, A < B, A + B \geq 180°$, | $b > 90°$, |
| | | $B < 90°, A > B, A + B \leqq 180°$, | $b < 90°$. |
| | $a < 90°$ | $B > 90°, A < B, A + B \geqq 180°$, | $b > 90°$. |
| | | $B < 90°, A > B, A + B > 180°$, | $b < 90°$. |
| Допускаетъ два рѣшенія. | $a > 90°$ | $B > 90°, A > B$. | |
| | | $B < 90°, A > B, A + B > 180°$ | |
| | $a < 90°$ | $B > 90°, A < B, A + B < 180°$ | |
| | | $B < 90°, A < B$. | |

Во всѣхъ прочихъ случаяхъ вопросъ не имѣетъ рѣшенія.

Аналитическое изслѣдованіе этихъ вопросовъ точнѣе показываетъ всѣ случаи возможности и невозможности заданія (*).

---

(*) Подробнѣе объ этомъ предметѣ можно найти въ сферикѣ *Шульца*, а также въ его диссертаціи, удостоенной академической преміи: De casibus ambiguis, qui in resolutione triangulorum sphaericorum occurrunt etc. commentate ab Academia Frider Halens et Vitep. consoc. praemio ornata. 1826. А также R. Heinsius: De casuum ambigorum etc.

## 2. Аналитическое изслѣдованіе случая 5.

По даннымъ a, b и A можно отыскать величину c изъ главной формулы
$$\mathrm{Cos}\ a = \mathrm{Cos}\ b.\ \mathrm{Cos}\ c + \mathrm{Sin}\ b.\ \mathrm{Sin}\ c.\ \mathrm{Cos}\ A.$$

Величина c въ этомъ случаѣ можетъ быть найдена, если мы какъ Sin c, такъ и Cos c выразимъ помощію $\mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}\ c$. Но извѣсно, что

$$\mathrm{Sin}\ c = 2\ \mathrm{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ c.\ \mathrm{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ c = 2\ \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\ c.\ \mathrm{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\ c = 2\ \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\ c.\ \frac{1}{1 + \mathrm{Tg}^2\ \frac{1}{2}\ c}$$

$$\mathrm{Cos}\ c = 2\ \mathrm{Cos}^2\ \tfrac{1}{2}\ c - 1 = 2\ \frac{1}{1 + \mathrm{Tg}^2\ \frac{1}{2}\ c} - 1 = \frac{1 - \mathrm{Tg}^2\ \frac{1}{2}\ c}{1 + \mathrm{Tg}^2\ \frac{1}{2}\ c}.$$

Подставивъ найденныя величины въ главную формулу, получимъ уравненіе 2-ой степени
$$(\mathrm{Cos}\ a + \mathrm{Cos}\ b)\ \mathrm{Tg}^2\ \tfrac{1}{2}\ c - 2\ \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Cos}\ A.\ \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\ c = \mathrm{Cos}\ b - \mathrm{Cos}\ a,$$

откуда $$\mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\ c = \frac{\mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Cos}\ A \pm \sqrt{\mathrm{Sin}^2\ a - \mathrm{Sin}^2\ b\ \mathrm{Sin}^2\ A}}{\mathrm{Cos}\ a + \mathrm{Cos}\ b} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Хотя эта формула не можетъ быть вычисляема непрерывнымъ логариѳмованіемъ; но за то помощію ея можемъ съ точностію опредѣлить, при какихъ условіяхъ данный для рѣшенія треугольникъ можетъ имѣть два рѣшенія, когда одно, и когда ниодного.

Послѣдній изъ этихъ случаевъ очевидно будетъ, когда $\mathrm{Sin}\ a < \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A$; слѣдоват. для возможности рѣшенія необходимо условіе $\mathrm{Sin}\ a = \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A$, или $\mathrm{Sin}\ a > \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A$.

Впрочемъ признакъ этотъ очевиденъ изъ уравненія $\mathrm{Sin}\ B = \dfrac{\mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A}{\mathrm{Sin}\ a}$.

При $\mathrm{Sin}\ a = \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A$ коренная величина уничтожится, а потому уничтожится и двойственность рѣшенія, которая зависитъ отъ двойнаго знака при радикалѣ.

Если $\mathrm{Sin}\ a > \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A$ то, говоря вообще, треугольникъ можетъ имѣть два рѣшенія, но эта двойственность идетъ только до извѣстнаго предѣла: а именно, такъ какъ $c \ngtr 180°$ и $\frac{1}{2}\ c \ngtr 90°$, то $\mathrm{Tg}\ \frac{1}{2}\ c$ всегда долженъ быть величиною положительною, слѣдоват. знакъ минусъ (—) при корнѣ можетъ быть принимаемъ до тѣхъ поръ, пока $\sqrt{\mathrm{Sin}^2\ a - \mathrm{Sin}^2\ b\ \mathrm{Sin}^2\ A} < \mathrm{Sin}\ b.\ \mathrm{Cos}\ A$,

т. е. до $\mathrm{Sin}\ a < \mathrm{Sin}\ b$, потому что
если $\mathrm{Sin}^2\ a - \mathrm{Sin}^2\ b.\ \mathrm{Sin}^2\ A < \mathrm{Sin}^2\ b\ \mathrm{Cos}^2\ A$,
то $\mathrm{Sin}^2\ a < \mathrm{Sin}^2\ b\ (\mathrm{Cos}^2\ A + \mathrm{Sin}^2\ A)$,
или $\mathrm{Sin}\ a < \mathrm{Sin}\ b$.

Отсюда видно, что разсматриваемая нами двойственность можетъ имѣть мѣсто только при условіи
$$\mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A < \mathrm{Sin}\ a < \mathrm{Sin}\ b;$$
но она изчезаетъ при $\mathrm{Sin}\ a \geqq \mathrm{Sin}\ b$ (слѣд. само собою и при $\mathrm{Sin}\ a > \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A$).

Изъ выведенныхъ нами изслѣдованій находимъ:

c имѣетъ одно значеніе при $\mathrm{Sin} a \geqq \mathrm{Sin}\ b$;
c « . . » два значен. при $\mathrm{Sin}\ a < \mathrm{Sin}\ b$, если въ тоже время $\mathrm{Sin} a > \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin} A$;
c « . . . . » одно значеніе при $\mathrm{Sin}\ a = \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A$;
c . . . невозможно при $\mathrm{Sin}\ a < \mathrm{Sin}\ b\ \mathrm{Sin}\ A$.

*Примѣч.* При заданіи треугольника по случаю 5, вычисленіе, какъ мы видѣли (случ. 5), обыкновенно начинаютъ опредѣленіемъ угла B. Но, вычисляя по формулѣ синусовъ, найдемъ два значенія: одно для угла остраго, другое для тупаго.

При Sin a $>$ Sin b не можетъ быть сомнѣнія въ выборѣ, потому что большей сторонѣ противолежитъ и большій уголъ; при Sin a $<$ Sin b двойственность остается до тѣхъ поръ, пока не получимъ Sin a $\overline{\underline{>}}$ Sin b.

Остальныя части c и C отыскиваются по аналогіямъ Непера.

### 3. Аналитическое изслѣдованіе случая 6.

По даннымъ A, B и a величина C можетъ быть отыскана изъ уравненія

$$\text{Cos a. Sin B. Sin C} = \text{Cos A} + \text{Cos B. Cos C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

въ которомъ величины Sin C и Cos C выразимъ помощію Cotg $\frac{1}{2}$ C.

Но $\text{Sin C} = \frac{2 \text{ Cotg}\frac{1}{2}\text{ C}}{\text{Cotg}^2 \frac{1}{2}\text{ C} + 1}$, $\quad \text{Cos C} = \frac{\text{Cotg}^2 \frac{1}{2}\text{ C} - 1}{\text{Cotg}^2 \frac{1}{2}\text{ C} + 1}$,

подставивъ эти формулы (во 2), получимъ уравненіе 2-ой степени; рѣшая его найдемъ

$$\text{Cotg}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C} = \frac{\text{Cos a Sin B} \pm \sqrt{\text{Sin}^2 \text{ A} - \text{Sin}^2 \text{ a Sin}^2 \text{ B}}}{\text{Cos A} + \text{Cos B}}.$$

Изслѣдуя это уравненіе, какъ въ 5 случаѣ, получимъ слѣдующіе окончательные результаты:

1) C имѣетъ одно значеніе для Sin A $\overline{\underline{>}}$ Sin B;

2) C . . . . . два значенія для Sin A $<$ Sin B,
если притомъ Sin A $>$ Sin a Sin B;

3) C . . . . . одно значеніе для Sin A $=$ Sin a. Sin B;

4) C невозможно для Sin A $<$ Sin a Sin B.

*Примѣч.* При рѣшеніи треугольника въ этомъ случаѣ отыскиваютъ сперва сторону b по формулѣ $\text{Sin b} = \frac{\text{Sin B}}{\text{Sin A}} \cdot \text{Sin a}$.

Если Sin A $>$ Sin B, то сомнѣнія въ выборѣ быть не можетъ, и величину b берутъ такъ, чтобы большему углу противолежала большая сторона; для Sin A $<$ Sin B двойственность рѣшенія остается до тѣхъ поръ, пока Sin A $\overline{\underline{>}}$ Sin a Sin B. Остальныя части C и c вычисляются по аналогіямъ Непера.

### Общій выводъ для 5 и 6 случаевъ.

Въ обоихъ разсматриваемыхъ нами случаяхъ (5 и 6), изъ данныхъ величинъ двѣ части лежатъ рядомъ, а одна отдѣльно:

въ 5-мъ случ., рядомъ A и b; отдѣльно a,
» 6-мъ . . ., рядомъ a и B; отдѣльно A.

Въ обоихъ случаяхъ уголъ съ угломъ, и сторону со стороною будемъ называть величинами *одноименными*.

Изъ предложенныхъ нами изслѣдованій можно вывести *общее правило признаковъ* возможности и невозможности *для обоихъ случаевъ*.

1. Если Sin. отдѣльно стоящей части менѣе произведенія синусовъ двухъ рядомъ стоящихъ частей, то треугольникъ *невозможенъ*, заданіе невѣрно.

2. Если Sin. отдѣльно стоящей части болѣе или равенъ Sin одноименной ему части, или равенъ произведенію синусовъ двухъ рядомъ стоящихъ частей, то треугольникъ имѣетъ *одно рѣшеніе*.

3. Если Sin. отдѣльно стоящей части менѣе синуса другой одноименной ему части, и притомъ болѣе произведенія синусовъ двухъ рядомъ стоящихъ частей, — треугольникъ имѣетъ *два рѣшенія*.

# § 7.

## ЗАДАЧИ,

### РѢШЕНІЕ КОТОРЫХЪ ОСНОВАНО НА СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ.

Чтобы показать пользу сферической тригонометріи въ многообразныхъ ея примѣненіяхъ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, дать нѣсколько примѣровъ для рѣшенія сферическихъ треугольниковъ, предложимъ нѣсколько задачъ.

**ЗАДАЧА 1.** *Вычислить объемъ наклоннаго параллелепипеда, зная длину его реберъ и величину угловъ, ими составляемыхъ.*

*Рѣшеніе.* Пусть въ данномъ параллелепипедѣ (черт. 24) ребра $OP = p$, $OQ = q$, $OR = r$ составляютъ углы $ROQ = a$, $POR = b$, $QOP = c$. Проведя $RK \perp OP$, $RJ \perp \square PQ$ и соединивъ J и K, найдемъ что $JK \perp OP$; притомъ получимъ два прямоугольныхъ треугольника ROK, RKJ, въ которыхъ $\angle RKJ$ равенъ углу наклоненія плоскостей ROP, QOP.

Точку O принявъ за центръ, произвольнымъ радіусомъ опишемъ шаровую поверхность, которая пересѣчетъ ребра параллелепипеда въ точкахъ A, B, C и такимъ образомъ составится сфер. треугольникъ ABC,

$$\text{въ которомъ } \angle POQ = \smile AB = c,$$
$$\angle POR = \smile AC = b,$$
$$\angle QOR = \smile BC = a.$$

Площадь параллелограмма $PQ = pq \operatorname{Sin} c$; слѣд.

$$\text{объемъ параллелепипеда } V = pq \operatorname{Sin} c \times RJ;$$
$$\text{но } RJ = RK \operatorname{Sin} A, \text{ а } RK = OR.\ \operatorname{Sin} b = r \operatorname{Sin} b,$$
$$\text{слѣд. } RJ = r.\ \operatorname{Sin} b.\ \operatorname{Sin} A, \text{ а потому}$$
$$V = pqr.\ \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} A.$$

Притомъ уже было доказано, что

$$\operatorname{Sin} A = 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A. \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}{2} \sqrt{\operatorname{Sin} S.\ \operatorname{Sin}(S-a) \operatorname{Sin}(S-b) \operatorname{Sin}(S-c)},$$

гдѣ $2S = (a + b + c)$, слѣдоват.

$$V = 2\,pqr \sqrt{\operatorname{Sin} S.\ \operatorname{Sin}(S-a) \operatorname{Sin}(S-b) \operatorname{Sin}(S-c)}.$$

*Примѣч.* Раздѣливъ вторую часть уравненія на шесть, получимъ объемъ четырехгранника, или трехсторонней пирамиды, выраженный помощію трехъ его реберъ p, q, r и ихъ угловъ наклоненія a, b, c.

**ЗАДАЧА 2.** *Найти двугранные углы, т. е. углы наклоненія плоскостей при ребрахъ тетраедра, гексаедра и додекаедра.*

*Рѣшеніе.* Если при центрѣ шара представимъ себѣ трегранный уголъ и грани его продолжимъ до пересѣченія съ шаровою поверхностію, то составится сф. треугольникъ, котораго стороны будутъ соотвѣствовать плоскимъ угламъ треграннаго угла, и углы сфер. треугольника будутъ равны угламъ наклоненія плоскостей при ребрахъ треграннаго. Поэтому каждый изъ двугр. угловъ правильнаго многогранника можетъ быть опредѣленъ по формулѣ

$$\operatorname{Cos} C = \frac{\operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} a.\ \operatorname{Cos} b}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b},$$

гдѣ a, b, c суть стороны; A, B, C углы сф. треугольника. Но какъ въ прав. многогранникѣ всѣ плоскіе, двугранные и многогранные углы равны, то

$$\operatorname{Cos} C = \operatorname{Cos} B = \operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos}^2 a}{\operatorname{Sin}^2 a} = \frac{\operatorname{Cos} a\,(1 - \operatorname{Cos} a)}{\operatorname{Sin}^2 a}$$

$$\operatorname{Cos} C = \frac{\operatorname{Cos} a\,(1 - \operatorname{Cos} a)}{1 - \operatorname{Cos}^2 a} = \frac{\operatorname{Cos} a}{1 + \operatorname{Cos} a} = \frac{\operatorname{Cos} a}{2\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} a}.$$

Но какъ въ тетраедрѣ $a = 60^\circ$
« гексаедрѣ $a = 90^\circ$
« додекаедрѣ $a = 108^\circ$

то $\operatorname{Cos} C = \frac{\operatorname{Cos} 60^\circ}{2\operatorname{Cos}^2 30} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$,

$\lg \operatorname{Cos} C = 8{,}522879$
$C = 70^\circ 31' 43{,}6''$.

Для гексаедра $C = 90^\circ$; для додекаедра $\operatorname{Cos} C = \frac{\operatorname{Cos} 108^\circ}{2\operatorname{Cos}^2 54^\circ}$,

откуда $C = 116^\circ\ 33'\ 54''$.

Приводя вычисленіе многогранныхъ угловъ октаедра и икосаедра къ трегранным угламъ, и вычисляя послѣдніе, получимъ:

уголъ наклоненія плоскостей въ октаедрѣ $= 109^\circ\ 28'\ 16{,}4''$;
— — — — — — — — — — въ икосаедрѣ $= 138^\circ\ 11'\ 22{,}86''$.

*Примѣч.* Понятно, что помощію сферической тригонометріи можно производить вычисленіе плоскихъ и двугранныхъ угловъ даннаго трегранняго или многограннаго угла.

**ЗАДАЧА 3.** *Найти поверхность сферическаго квадратнаго градуса, т. е. такого сфер. четыреугольника, у котораго каждая изъ сторонъ равна 1°.*

*Рѣшеніе.* Положивъ пов. шара $= P$, при центрѣ O этого четыреугольника получимъ четыре треугольника, которые равны $\triangle AOB$ (черт. 25); притомъ, проведя дугу б. кр. $OQ \perp AB$, получимъ $\triangle AOQ = \triangle QOB$, слѣдовательно $BQ = 30'$, $AOB = 90^\circ$, $QOB = 45^\circ$, $OQB = 90^\circ$; по этимъ даннымъ требуется найти уг. OBQ.

Изъ треугольника OQB имѣемъ $\operatorname{Cos} QOB = \operatorname{Sin} OBQ . \operatorname{Cos} BQ$;

слѣд. $\operatorname{Sin} OBQ = \frac{\operatorname{Cos} QOB}{\operatorname{Cos} BQ} = \frac{\operatorname{Cos} 45^\circ}{\operatorname{Cos} 30'}$, откуда

$OBQ = \frac{1}{2} B = 45^\circ\ 0'\ 8''$, $B = 90^\circ\ 0'\ 16.''$

$$\text{Пов. сф. мн.} = \frac{S - 180^\circ (n-2)}{720^\circ} . P = \frac{1'\ 4''}{720^\circ} P = \frac{64}{720.\ 3600} P = \frac{1}{40\ 500} P.$$

Слѣдоват. въ шаровой поверхности содержатся 40 500 сфер. квадратныхъ градусовъ.

**ЗАДАЧА 4.** *Привести уголъ къ горизонтальной плоскости.*

*Рѣшеніе.* Пусть OD, OE (черт. 26) обозначаютъ стороны даннаго угла DOE, лежащаго въ плоскости наклонной къ горизонту. Изъ вершины O даннаго угла, а также изъ какихъ нибудь точекъ D и E, находящихся на его сторонахъ, проведемъ OO′, DD′ и EE′ перпендикулярно къ горизонтальной плоскости MN; проведя D′O′ и E′O′, получимъ ∠ D′O′E′, который есть проекція угла DOE на горизонтальную плоскость. Этотъ-то уголъ, называемый приведеннымъ къ горизонту, и требуется опредѣлить помощію угловъ DOE, DOO′, EOO′, предварительно измѣренныхъ.

Представимъ себѣ, что изъ точки O, какъ центра, произвольнымъ радіусомъ описана шаровая поверхность, часть которой, треугольникъ BCA, будетъ имѣть данными три стороны AB, BC, AC, изъ которыхъ каждая служитъ мѣрою извѣстному углу ей соотвѣтствующему.

Искомый уголъ A въ этомъ треугольникѣ найдется помощію формулы

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} (p - a)}{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}}.$$

Численный примѣръ. Пусть даны: $DOE = 37^\circ 19' 40'' = a$;
$EOO' = 67^\circ\ 24'\ 25'' = b$;
$DOO' = 53^\circ\ 42'\ 35'' = c$.

Вычисленіе угла A.

Получимъ:
$a + b + c = 2p = 158° 26' 40''$,
слѣд. $p = 79° 13' 20''$;
$p - a = 41° 53' 40''$.

$$\lg \operatorname{Sin} p = 9,992271$$
$$\lg \operatorname{Sin} (p - a) = 9,824621$$
$$\lg' \operatorname{Sin} b = 0,034677$$
$$\lg' \operatorname{Sin} c = 0,093649$$
$$19,945218$$
$$\lg \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} A = 9,972609$$
$$\tfrac{1}{2} A = 20° 8' 10''$$
$$A = 40° 16' 20''.$$

Итакъ уголъ 37° 19′ 40″, измѣренный въ плоскости наклонной къ горизонту, приводится къ 40° 16′ 20″, когда онъ проектированъ на горизонтальную плоскость.

*Примѣч*. Задача эта весьма часто употребляется при съемкѣ плановъ, когда опредѣленныя точки находятся на различныхъ высотахъ въ отношеніи къ плоскости горизонтальной.

**ЗАДАЧА 5**. *По даннымъ широтамъ и долготамъ двухъ мѣстъ A, B, находящихся на поверхности земнаго шара, найти кратчайшее разстояніе между этими точками по дугѣ большаго круга, принимая земную поверхность за шаровую.*

*Рѣш*. Пусть CA и DB изображаютъ широты двухъ мѣстъ A и B (черт. 27); дуги эти, будучи продолжены, пройдутъ черезъ полюсъ P. Такимъ образомъ составится сфер. треугольникъ PAB, въ которомъ стороны PA и PB будутъ дополненія данныхъ сторонъ. Уголъ DPC, содержимый этими сторонами, имѣетъ мѣрою по экватору дугу CD, т. е. разность долготъ.

Третья сторона AB есть искомое разстояніе и вычисленіе ея производится по 3-му случаю рѣш. сф. треугольниковъ.

Лентеригъ (Lenthéric), профессоръ школы въ Монпелье, предлагаетъ найти кратчайшее разстояніе по дугѣ б. круга между Марселемъ и С. Петербургомъ, если извѣстно, что широта Марселя 43° 17′ 49″, долгота отъ Парижск. обсерваторіи 3° 2′; широта Петерб. 59° 56′ 23″ (*), а долгота его 27° 58′ 30″; обѣ широты сѣверныя и обѣ долготы восточныя отъ парижскаго меридіана.

Обозначивъ черезъ C уголъ APB, черезъ a, b стороны его содержащія, а черезъ c искомую сторону AB, получимъ, что вычисленіе ея можетъ быть произведено различными способами; мы вычислимъ:

1. Помощію главной формулы

$$\operatorname{Cos} c = \operatorname{Cos} a . \operatorname{Cos} b + \operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b . \operatorname{Cos} C \text{ или}$$
$$\operatorname{Cos} c = \operatorname{Cos} b . (\operatorname{Cos} a + \operatorname{Sin} a . \operatorname{Tg} b . \operatorname{Cos} C),$$

разлагая ее на двѣ логариѳмическія, посредствомъ вводнаго угла φ.

2. По аналогіямъ Непера

$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} (A + B) = \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} C \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (a - b)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (a + b)},$$
$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2} (A - B) = \operatorname{Cotg} \tfrac{1}{2} C \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} (a - b)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} (a + b)},$$

и наконецъ по

$$\operatorname{Sin} C : \operatorname{Sin} B = \operatorname{Sin} c : \operatorname{Sin} b.$$

(*) Лентеригъ взялъ широту Петербурга изъ Leçons de Navig. par Dulague, гдѣ она была показана ошибочно. Предлагаемъ учащимся по предложенному образцу перерѣшить эту задачу, принимая широту Петербурга 59° 56′ 31″ (см. мореходныя таблицы, изданныя Морскимъ кадетскимъ корпусомъ. С. п. б. 1860).

*Рѣш. 1. Отысканіе вспомогат. угла* $\varphi$.

$\lg Tg\, b = 9,762494$
$\lg Cos\, C = 9,957482$
$\lg Tg\, \varphi = 9,719976$
$\varphi = 27^\circ\, 41'\, 22''$
$a - \varphi = 19^\circ\, 0'\, 49''$

*Вычислен. стор. с.*

$\lg Cos\, b = 9,937267$
$\lg Cos(a-\varphi) = 9,975635$
$\lg' Cos\, \varphi = 0,052822$
$\lg Cos\, c = 9,965723$
$c = 22^\circ\, 27'\, 57''$

**Предварит. вычислен. для рѣш. по аналог.**

$\frac{1}{2}\, C = 12^\circ\, 28'\, 15''$
$\frac{1}{2}\,(a + b) = 38^\circ\, 22'\, 54''$
$\frac{1}{2}\,(a - b) = 8^\circ\, 19'\, 17''$

*Рѣш. 2. По аналог. Непера.*

*Вычисленіе* $\frac{1}{2}\,(A + B)$.

$\lg Cotg\, \frac{1}{2}\, C = 10,655292$
$\lg Cos\, \frac{1}{2}\,(a-b) = 9,995403$
$\lg' Cos\, \frac{1}{2}\,(a+b) = 0,105744$
$\lg Tg\, \frac{1}{2}\,(A+B) = 10,756439$
$\frac{1}{2}\,(A+B) = 80^\circ\, 3'\, 43''$.

*Вычисл.* $\frac{1}{2}\,(A - B)$.

$\lg Cotg\, \frac{1}{2}\, C = 10,655292$
$\lg Sin\, \frac{1}{2}\,(a-b) = 9,160545$
$\lg' Sin\, \frac{1}{2}\,(a+b) = 0,206981$
$\lg Tg\, \frac{1}{2}\,(A-B) = 10,022818$
$\frac{1}{2}\,(A-B) = 46^\circ\, 30'\, 16''$
$A = 126^\circ\, 33'\, 59''$
$B = 33^\circ\, 33'\, 27''$

*Вычислвн. стор. с.*

$\lg Sin\, b = 9,699760$
$\lg Sin\, C = 9,624999$
$\lg' Sin\, B = 0,257453$
$\lg Sin\, c = 9,582212$
$c = 22^\circ\, 27'\, 57''$.

Слѣдовательно дуга, измѣряющая кратчайшее разстояніе отъ Марселя до С. Петерб. заключаетъ въ себѣ $22^\circ\, 27'\, 57''$.

Для переложенія этой дуги въ линейныя мѣры поступаютъ слѣд. образомъ извѣстно что $1^\circ$ большаго кр. земн. шара содержитъ въ себѣ 104,3 в., то помощію простаго тройнаго правила найдемъ

$x : 104,3$ в. $= 22^\circ\, 27'\, 57'' : 1^\circ$, откуда

$x = 336,98$ г. м. или почти 337 г. м.

*Прибавленіе.* Какъ велика будетъ поправка, если произведемъ это вычисленіе снова, принимая широту Петербурга въ $59^\circ\, 56'\, 31''$?

Задачи для упражненія.

1. Сыскать кратчайшее разстояніе между С. Петербургомъ и Москвою, если широта перваго $59^\circ\, 56'\, 31''$. широт. М. $55^\circ\, 45'\, 45''$, разность долготъ $7^\circ\, 13'\, 15''$.

*Рѣш.* 591, 612 верст.

2. Шир. Петербурга $59^\circ\, 56'\, 31''$. шир. Данцига $54^\circ\, 21'\, 4''$, разность долготъ $10^\circ\, 30'\, 27''$; найти кратчайшее разстояніе между этими городами, считая по дугѣ больш. кр. земнаго шара.

*Рѣшеніе.* $x = 7^\circ\, 3'\, 7'' = 105\, \frac{1}{4}$ г. м.

# ПРИБАВЛЕНІЕ.

## 1.

**ТЕОРЕМА.** *Окружность малаго круга равна произведенію изъ окружности большаго круга на синусъ разстоянія малаго круга отъ его полюса, или на косинусъ разстоянія малаго круга отъ большаго, ему параллельнаго* (*).

*Доказательство.* Проведя ось PP′ (черт. 1) и прямыя OF = R и GF = r, т. е. радіусъ шара и радіусъ малаго круга, и замѣчая, что $\angle$ EOP′ = ⌣ FP′ и $\angle$ OFG = $\angle$ FOB = ⌣ BF, получимъ, что

$$\frac{FG}{FO} = \frac{r}{R} = \text{Sin } FP' = \text{Cos } BF.$$

Изъ геометріи же извѣстно, что

$$\frac{\text{окружн. } EF}{\text{окружн. } AB} = \frac{r}{R}; \text{ слѣд. } \frac{\text{окр. } EF}{\text{окр. } AB} = \text{Sin } FP' = \text{Cos } BF,$$

откуда окр. EF = окр. AB. Sin FP′,
= окр. AB. Cos BF,

гдѣ BF = l, есть географическая широта мѣста.

*Примѣч. 1.* Отсюда нетрудно вывести, что *величина одного градуса параллели равняется произведенію градуса экватора на косинусъ географической широты мѣста*,

т. е. $1^\circ$ параллели = 15 г. мил. $\times$ Cos l.

**ЗАДАЧА.** *Положивъ что l′ и l суть широты двухъ параллелей земного шара, вычислить поверхность пояса P, содержимаго между ними.*

*Рѣшеніе.* Принимая землю за шаръ, получимъ

$$P = 4 \pi R^2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} (l' - l) \text{ Cos } \tfrac{1}{2} (l' + l).$$

(См. матем. геогр. Савича, 1858 г., гл. II, §20).

## 2.

**ЗАДАЧА ЛЕЖАНДРА.** *Рѣшеніе сферическаго треугольника, котораго три стороны весьма малы въ сравненіи съ радіусомъ шара* (**).

1. Пусть данъ сферическій треугольникъ ABC, абсолютная величина сторонъ котораго равна a, b, c; черезъ A, B, C соотвѣтственно обозначимъ углы, противолежащіе даннымъ сторонамъ, а черезъ r — радіусъ шара.

Если возьмемъ сферическій треугольникъ, подобный данному, и начерченный на поверхности шара, котораго радіусъ равенъ 1, то стороны этого пос-

(*) Разстояніе малаго круга отъ большаго, ему параллельнаго, измѣряется частію l, меридіанальной дуги, содержимой между этими кругами.

(**) Задача эта, имѣющая обширныя примѣненія въ геодезіи, была предложена *Лежандромъ*, и потому названа его именемъ (Legendre, Mém. de Paris 1787, p. 338 и Trigonom. Append. V). *Гаусъ* обобщилъ и упростилъ ея рѣшеніе и доказательство (Gauss, disq. gener. circa superficies curvas. Comm. Götting VI, 1823). Предлагаемъ также прочесть по этому предмету изслѣдованія *Лагранжа* (Lagrange, j. de l'ec. polyt. Cah. 6, p. 293).

лѣдняго треугольника выразятся черезъ $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, а потому получимъ

$$\operatorname{Cos}\frac{a}{r} = \operatorname{Cos}\frac{b}{r}\,.\,\operatorname{Cos}\frac{c}{r} + \operatorname{Sin}\frac{b}{r}\,.\,\operatorname{Sin}\frac{c}{r}\,.\,\operatorname{Cos} A,$$

откуда $\operatorname{Cos} A = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{a}{r} - \operatorname{Cos}\frac{b}{r}\operatorname{Cos}\frac{c}{r}}{\operatorname{Sin}\frac{b}{r}\,.\,\operatorname{Sin}\frac{c}{r}}$.

2. Разложивъ синусы и косинусы въ ряды (Прямол. триг. приб. 2.), получимъ, что, такъ какъ радіусъ весьма великъ въ сравненіи со сторонами a, b, c, то откидывая члены, въ которые входятъ степени высшія $\frac{1}{r^4}$, съ достаточною степенью приближенія получимъ

$$\operatorname{Cos}\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\ldots,$$

$$\operatorname{Cos}\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\ldots, \qquad \operatorname{Sin}\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\ldots\ldots,$$

$$\operatorname{Cos}\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24b^4}\ldots, \qquad \operatorname{Sin}\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\ldots\ldots$$

Вставивъ эти величины въ выраженія Cos A, произведя вычисленія, и при этомъ пренебрегая тѣми членами, въ которые войдутъ степени высшія противъ $\frac{1}{r^4}$, получимъ

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \dfrac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24r^4}}{\dfrac{bc}{r^2}\left(1 - \dfrac{c^2 + b^2}{6r^2}\right)}.$$

Сокращая общаго дѣлителя $r^2$, а также умножая оба члена этой дроби на $1 + \frac{c^2 + b^2}{6r^2}$ и, гдѣ можно производя упрощенія, получимъ

$$\operatorname{Cos} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24bcr^2}\ \ldots (1)$$

3. Въ уравненіи этомъ, положивъ $r = \infty$, получимъ, что сферическій треугольникъ обратится въ прямолинейный, котораго стороны останутся тѣже т. е. a, b, c, углы же A′, B′, C′ прямолинейнаго треугольника будутъ разнствовать отъ угловъ A, B, C нѣкоторою величиною, и изъ уравненія (1) получимъ

$$\operatorname{Cos} A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

выраженіе, которое намъ извѣстно уже изъ прямолинейной тригонометріи (§ 12, теор. 6). Отсюда не трудно получить, что

$$\operatorname{Sin}^2 A' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2};$$

Поэтому уравненіе (1) можетъ быть представлено въ видѣ слѣдующей формулы:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} A &= \operatorname{Cos} A' - \frac{bc\,\operatorname{Sin}^2 A'}{6r^2} \\ \text{или } \operatorname{Cos} A &= \operatorname{Cos} A' - \frac{s}{3r^2}\operatorname{Sin} A', \end{aligned}\right\}\ (2)$$

гдѣ $s = \frac{1}{2}bc\operatorname{Sin} A'$, т. е. равно площади прямолинейнаго треугольника.

Изъ формулы (2) видно, что уголъ A болѣе A′, но что разность должна быть весьма незначительна, потому что послѣдній членъ этого уравненія имѣетъ въ знаменателѣ $r^2$.

Чтобы точнѣе обозначить эту разность, положимъ, что

$A = A' + x$, откуда $\mathrm{Cos}\, A = \mathrm{Cos}\, A'.\ \mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x.\ \mathrm{Sin}\, A'$.

Если, при разложеніи Sin x и Cos x въ рядъ, откинемъ членъ $x^2$, то получимъ $\mathrm{Cos}\, x = 1$, $\mathrm{Sin}\, x = x$, слѣдовательно

$$\mathrm{Cos}\, A = \mathrm{Cos}\, A' - x.\ \mathrm{Sin}\, A' \ldots\ldots (3).$$

Сравнивая между собою уравненія (2) и (3), получимъ $x = \frac{s}{3r^2}$, гдѣ s есть площадь прямолинейнаго треугольника; притомъ пренебреженное нами количество $x^2$ имѣетъ степень меньшую противъ $\frac{1}{r^4}$.

Довольствуясь этимъ приближеніемъ, найдемъ $A = A' + \frac{s}{3r^2}$, такимъ же образомъ и для другихъ угловъ $B = B' + \frac{s}{3r^2}$,

$$C = C' + \frac{s}{3r^2}.$$

4. Сложивъ эти три уравненія, получимъ

$$A + B + C = 180^\circ + \frac{s}{r^2},$$

т. е. что количеество $\frac{s}{r^2}$ равно *сферическому избытку* $\varepsilon$, который, какъ извѣстно (сф. тр. § 1, теор. 8), выражаетъ площадь сферическаго треугольника; слѣдовательно, вмѣсто предыдущихъ уравненій получимъ

$$A = A' + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$B = B' + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$C = C' + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда находимъ, что: *если въ сферическомъ треугольникѣ ABC стороны весьма малы въ сравненіи съ радіусомъ шара, то построивъ прямолинейный треугольникъ, имѣющій стороны одинаковой длины со сторонами треугольника сферическаго, получимъ, что площади этихъ двухъ треугольниковъ будутъ взаимно равны; углы же треугольника сферическаго будутъ равны соотвѣтственно угламъ треугольника прямолинейнаго вмѣстѣ съ одною третью сферическаго избытка.*

# ФОРМУЛЫ

## СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ.

### 1. *Для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ ($A = 90°$).*

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\mathrm{Cos}\ a = \mathrm{Cos}\ b.\ \mathrm{Cos}\ c$, | 4) $\mathrm{Cos}\ a = \mathrm{Cotg}\ B.\ \mathrm{Cotg}\ C$, | Изъ мнемо- |
| 2) $\mathrm{Sin}\ c = \mathrm{Sin}\ a.\ \mathrm{Sin}\ C$, | 5) $\mathrm{Sin}\ c = \mathrm{Tang}\ b.\ \mathrm{Cotg}\ C$, | ническихъ пра- |
| 3) $\mathrm{Cos}\ C = \mathrm{Cos}\ c.\ \mathrm{Sin}\ B$, | 6) $\mathrm{Cos}\ C = \mathrm{Cotg}\ a.\ \mathrm{Tang}\ b$. | вилъ Непера. |

### 2. *Для рѣшенія косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.*

1) $\mathrm{Sin}\ a : \mathrm{Sin}\ b : \mathrm{Sin}\ c = \mathrm{Sin}\ A : \mathrm{Sin}\ B : \mathrm{Sin}\ C.$

2) $\mathrm{Cos}\ c = \mathrm{Cos}\ b.\ \mathrm{Cos}\ c + \mathrm{Sin}\ b.\ \mathrm{Sin}\ c.\ \mathrm{Cos}\ A.$

$$\mathrm{Cos}\ a = \frac{\mathrm{Cos}\ b}{\mathrm{Cos}\ \varphi}\mathrm{Cos}\ (c - \varphi),\ \mathrm{Tang}\ \varphi = \mathrm{Tang}\ b.\ \mathrm{Cos}\ A.$$

3) $\mathrm{Cos}\ A = - \mathrm{Cos}\ B.\ \mathrm{Cos}\ C + \mathrm{Sin}\ B.\ \mathrm{Sin}\ C.\ \mathrm{Cos}\ a.$

4) $\mathrm{Cotg}\ A.\ \mathrm{Sin}\ C = \mathrm{Cotg}\ a.\ \mathrm{Sin}\ b - \mathrm{Cos}\ b.\ \mathrm{Cos}\ C.$

$$\mathrm{Sin}\ (C + \varphi) = \mathrm{Cotg}\ a.\ \mathrm{Tang}\ b.\ \mathrm{Sin}\ \varphi, \quad \mathrm{Cotg}\ \varphi = \frac{\mathrm{Cotg}\ A}{\mathrm{Cos}\ b}.$$

5) $\mathrm{Sin}^2\ \frac{1}{2}A = \frac{\mathrm{Sin}\ (p - b).\ \mathrm{Sin}\ (p - c)}{\mathrm{Sin}\ b.\ \mathrm{Sin}\ c}$; $\mathrm{Cos}^2\ \frac{1}{2}A = \frac{\mathrm{Sin}\ p.\ \mathrm{Sin}\ (p - a)}{\mathrm{Sin}\ b.\ \mathrm{Sin}\ c}$;

$$\mathrm{Tang}^2\ \tfrac{1}{2}A = \frac{\mathrm{Sin}\ (p - b).\ \mathrm{Sin}\ (p - c)}{\mathrm{Sin}\ p.\ \mathrm{Sin}\ (p - a)},\ \text{гдѣ}\ p = \tfrac{1}{2}(a + b + c).$$

6) $\mathrm{Tang}^2\ \frac{1}{2}a = \frac{-\mathrm{Cos}\ P.\ \mathrm{Cos}\ (P - A)}{\mathrm{Cos}\ (P - B).\ \mathrm{Cos}\ (P - C)}$, гдѣ $P = \frac{1}{2}(A + B + C)$.

7) $\mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(a + b) : \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(a - b) = \mathrm{Cotg}\ \frac{1}{2}C : \mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}(A - B)$,
$\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(a + b) : \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(a - b) = \mathrm{Cotg}\ \frac{1}{2}C : \mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}(A + B)$,
$\mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(A + B) : \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(A - B) = \mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}c : \mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}(a - b)$,
$\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(A + B) : \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(A - B) = \mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}c : \mathrm{Tang}\ \frac{1}{2}(a + b)$. — Анал. Неп.

### 3. *Площадь сферическаго треугольника.*

I) $\triangle\ ABC = P\left(\frac{A + B + C - 180°}{720°}\right)$, гдѣ $P$ = поверхн. шара.

# ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

### Въ прямолинейной тригонометріи.

| Сраницы. | Строки. | Напечатано: | Должно читать: |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 снизу | число градусовъ минутъ и секундъ умножить на $\frac{10}{9}$ | число град. мин. и сек., по приведен. ихъ въ градусы, умножить на $\frac{10}{9}$. |
| 6 | 13сниз. | 2) $a = b$ и 3) $a\ b$. | 2) $a = b$ и 3) $a < b$. |
| 16 | 9 снизу | Cosec B (при рад. a). | Cosec B (при рад. b). |
| 36 | 4сверх. | $2\ \mathrm{Sin}\frac{1}{2}(p-q).\ \mathrm{Sin}\frac{1}{2}(p-q).$ | $2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(p+q).\ \mathrm{Sin}\frac{1}{2}(p+q).$ |

### Въ сферической тригонометріи.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 47 | 15сниз. | 3) $\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A+B) : \mathrm{Sin}\frac{1}{2}(-B)$ | 3) $\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A+B) : \mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A-B)$ |

Ст 58 | 16 | 54 | 50

# ОБЪЯВЛЕНІЕ.

*Въ книжныхъ магазинахъ Я. А. Исакова (въ Гостинномъ дворѣ) и А. Ѳ. Базунова (у Казанскаго моста) продаются учебныя руководства Морскаго кадетскаго корпуса:*

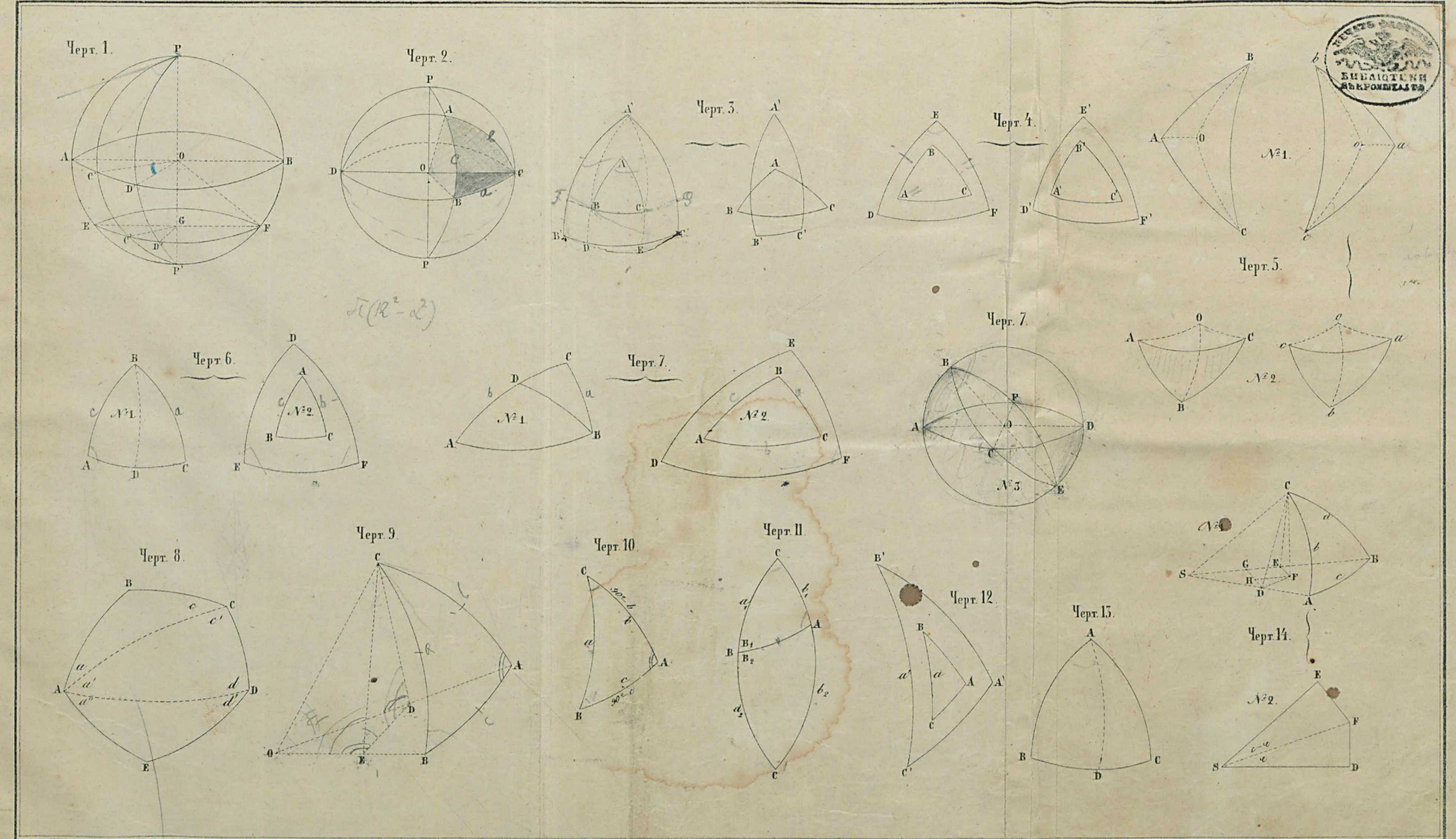
Начальная алгебра, по порученію начальства Морскаго корпуса составилъ І. Сомовъ. Спб. Ц. 1 р. 25 к..

Начальныя основанія прямолинейной тригонометріи, по порученію начальства Морскаго корпуса состав. А. Дмитріевъ. Спб. Ц 75 к.; вѣсовыхъ за 1 ф.

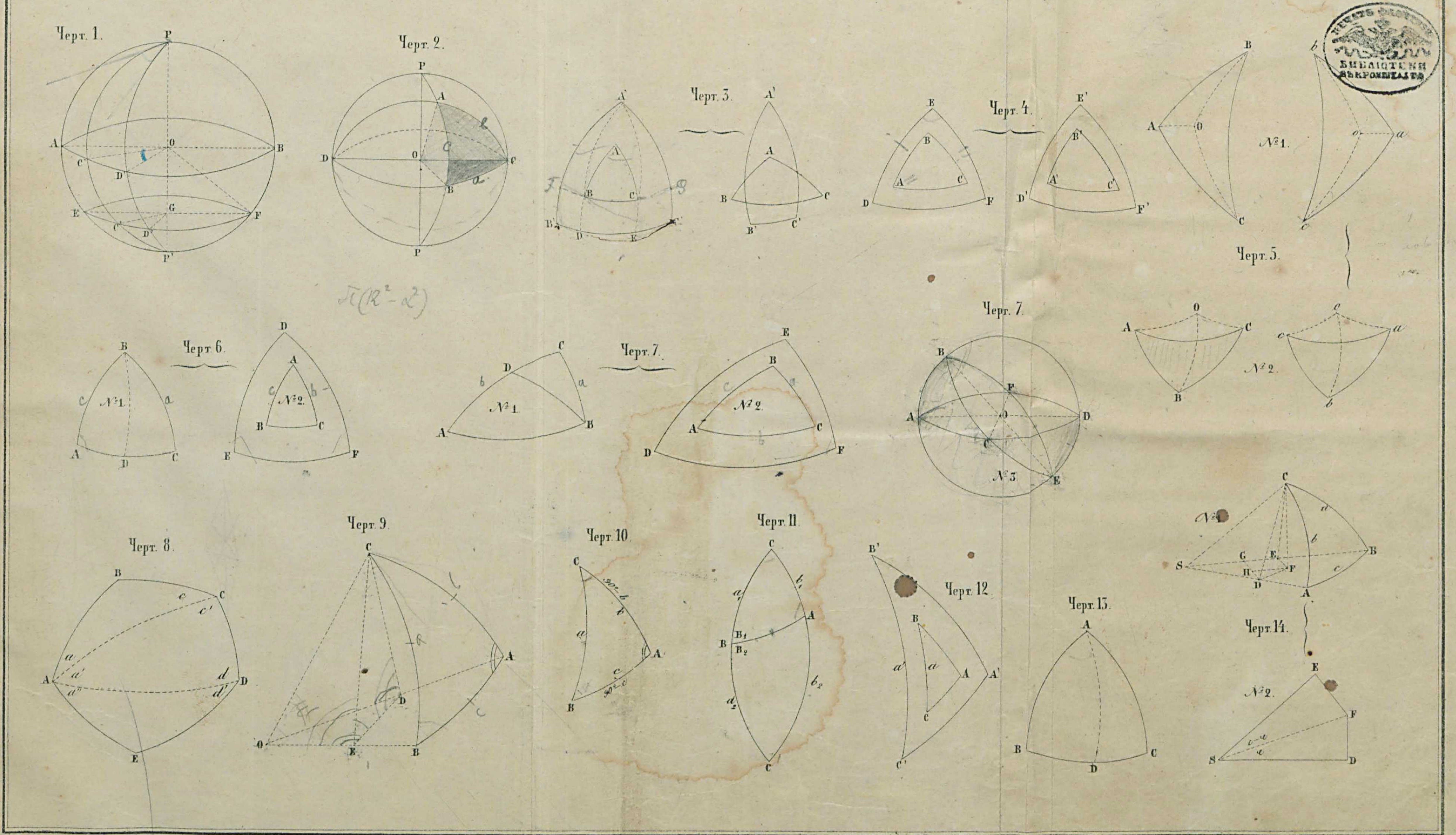
Оба эти руководства совѣтомъ при попечителѣ Спб. учебнаго округа рекомендованы для употребленія въ гимназіяхъ.

Въ тѣхъ же магазинахъ поступило въ продажу вновь отпечатанное руководство:

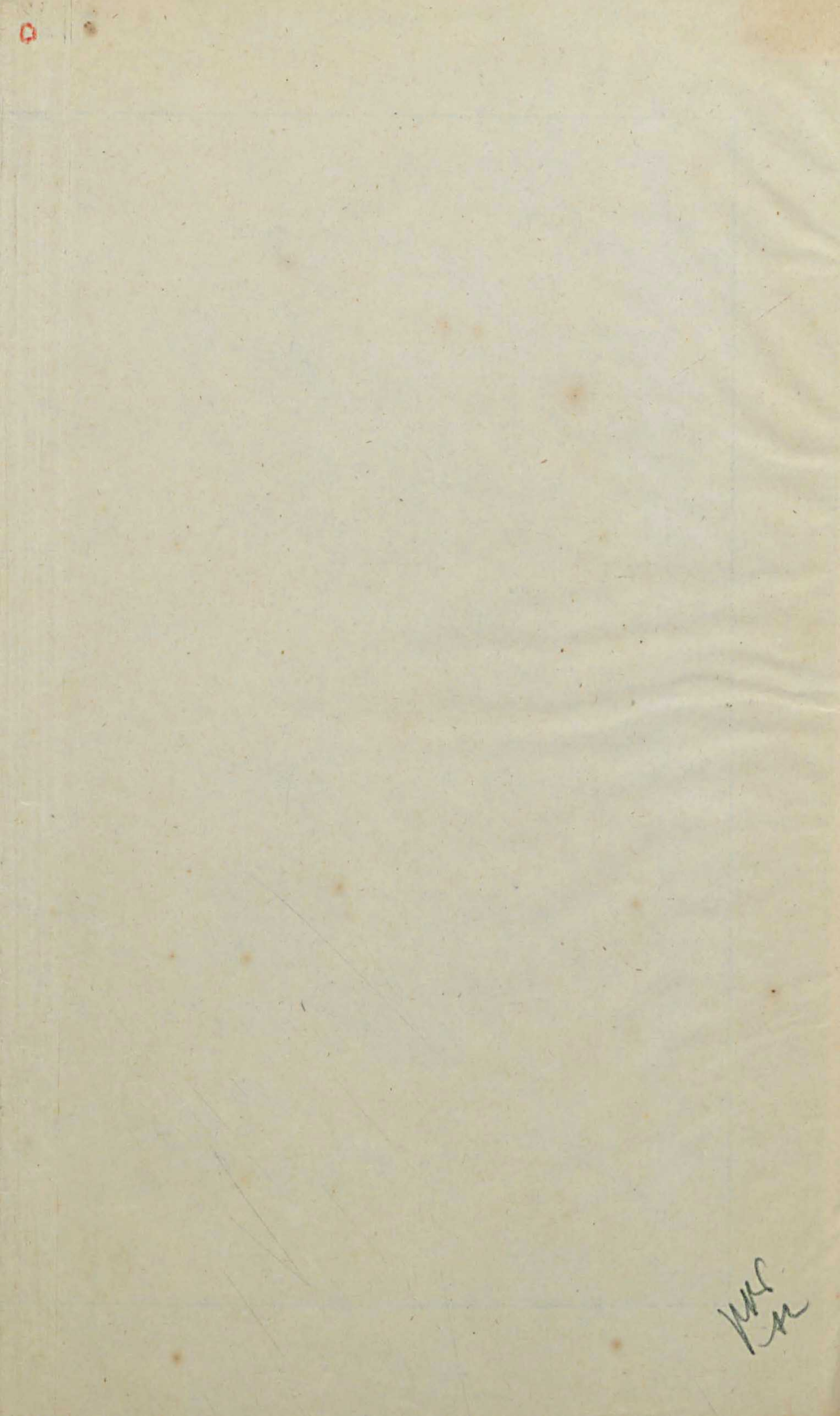
Начальныя основанія сферической геометріи и сферической тригонометріи, по порученію начальства Морскаго корпуса состав. А. Дмитріевъ. Цѣна 50 к., вѣсовыхъ за 1 ф.



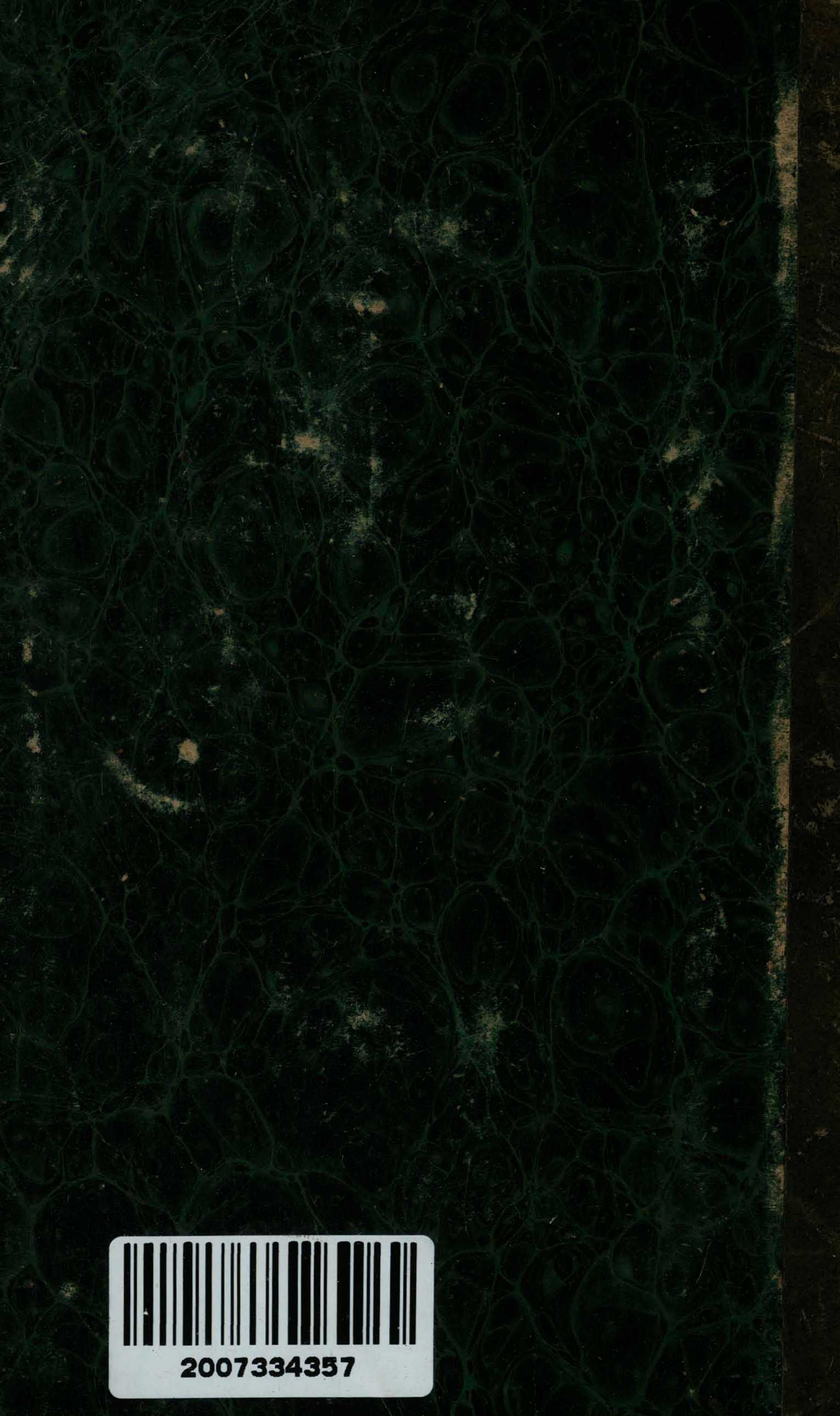

Лит. Прохорова.




Лит. Прохорова.



Въ концѣ <u>двѣ</u>
таблицы съ чертежами.


2007334357